1 EL SISTEMA DE NUMERACIÓN

Presentación de la unidad

Respecto a los contenidos concretos de la unidad, se comienza con un repaso general de la numeración, prestando especial atención al origen del cero. Tras ello, se introducen aspectos nuevos que complementan el sentido de la numeración y dan lugar a una visión más flexible de la misma.

Son tres contenidos diferentes. Por un lado, las distintas variaciones que se pueden originar cuando se toman como unidades otros órdenes de magnitud. Por otro lado, se enseña a los alumnos a explotar una de las características del sistema de numeración, como es el hecho de que se puedan redistribuir los elementos de cada número de manera que sea muy sencillo hallar la suma de los mismos, por una parte, o averiguar cuáles son esos números conociendo su suma. Finalmente, se hace una presentación somera de los sistemas de numeración romano y egipcio.

Sugerencias metodológicas

El trabajo con los sistemas de numeración romano y egipcio se plantea como una curiosidad histórica, mostrando a los alumnos otras formas distintas de representar las cantidades. En el caso de la numeración romana, lo más importante es que el alumno sepa leer los números y traducirlos a nuestro sistema decimal, pues en nuestro tiempo todavía este tipo de numeración tiene su lugar:

- Muchos relojes analógicos expresan las horas en números romanos.
- En bastantes libros los capítulos se numeran con números romanos.
- La estructura de las disposiciones legales encabeza sus distintas partes con números romanos.
- Los números romanos forman parte también de la ordenación de numerosos documentos e informes.
- Los siglos se escriben en números romanos. Estamos en el siglo XXI.

Con lasunidades arbitrarias en la numeración se atiende a dos fines. Uno de ellos es poder explicar los casos del uso de decimales en las estructuras multiplicativas. El otro es la necesidad de ajustar el sistema de conteo al tamaño de lo que se cuenta. Por ejemplo, no es raro escribir la población que tiene un país de forma tal que las unidades sean los miles o millones. Así, la Unión Europea tiene 447,007 millones de habitantes, y Estonia tiene 1 330,068 habitantes (en miles). En el caso de la UE, las siete milésimas son en realidad siete unidades de millar, y en el de Estonia, las milésimas son ocho habitantes.

Respecto a la suma de números consecutivos, se utiliza la sucesión de números, que crece de uno en uno, para reordenarlos y así poder calcular mejor su suma. En las páginas correspondientes se explicará este aspecto más despacio.

Resolución de problemas

La unidad se completa con las propuestas sobre resolución de problemas. Se trabaja con problemas de dos operaciones. Por un lado, se repasa la técnica para descubrir la pregunta oculta, que es un primer paso para la resolución del mismo. Tras ello, se trabaja también el repaso de la categoría de problemas de doble inclusión. Y la unidad se cierra con las situaciones de aprendizaje que se plantean en la Tarea competencial.

Educación en valores

En esta unidad, además de iniciarla con una lectura en la que se repasa la historia del cero en varias civilizaciones, también nos detenemos en dos culturas, la romana y la egipcia, para estudiar su visión de los números. Esto nos puede dar pie a trabajar los valores que aportan la cultura y la historia.

Para valorar cómo el pasado nos enseña a afrontar el futuro, podemos investigar sobre los aspectos culturales propios de nuestra localidad e identificar las fuentes históricas y preguntar por el sentimiento que les despierta poseer ese patrimonio y confrontarlo a la pérdida del mismo.

Una idea que puede ayudar a reforzar la necesidad de conservar, proteger y difundir el patrimonio propio es compararlo con el patrimonio de otros lugares, cómo lo conservan, qué aprovechamiento tiene... y esto lo podrán hacer recordando y repasando las visitas y excursiones escolares que hayan realizado.

Recursos y materiales recomendados

Introducimos el apartado de numeración con una lectura motivadora sobre la historia del cero. Seguramente les resultará curioso averiguar datos sobre un número del que es muy probable que tengan escaso conocimiento y que, aun existiendo en otras culturas, no se utilizó en Europa hasta el siglo XII.

En 6.º, el alumnado ya domina el sistema de numeración, por lo que en esta unidad repasamos los contenidos sabidos e introducimos otros nuevos, como son los polinomios. Para trabajar estos conceptos encontraremos recursos en:

Materiales imprimibles:

- Murales de numeración.
- Operaciones con números romanos.
- Tanque matemático.
- Lectura de números decimales.
- Cómo se escriben los números decimales.
- Comparar números decimales.

Pensamiento computacional

En esta primera unidad conviene reforzar determinadas estrategias para el cálculo de sumas y restas con y sin decimales.

- Sumas de cuatro cifras con y sin decimales con rebasamiento. Fomentar el uso de las siguientes estrategias:
  - Sumas por redondeo. Uso de los complementarios.
  - Sumas por órdenes de unidades.
  - Sumas por compensación.
- Restas de cuatro cifras con y sin decimales con rebasamiento. Fomentar el uso de las siguientes estrategias:
  - Restas por órdenes de unidades.
  - Restas en escalera ascendente.
  - Propiedad fundamental de la resta.

Esquema

El sistema de numeración

Números

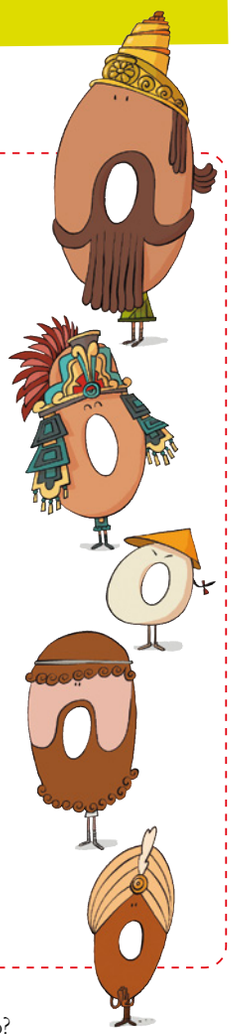
- El origen del cero.
- Lectoescritura de cualquier número. Ordenación e intercalación.
- Unidades arbitrarias. En el sistema de numeración. Repaso.
- Sumas de paquetes de números.
- Averiguación de números consecutivos conociendo su suma.
- Otros sistemas de numeración: numeración egipcia y numeración romana.

Problemas

- Problemas de dos operaciones. Descubrir la pregunta oculta.
- Problemas de dos operaciones. Doble Inclusión. Nivel I.
- Problemas de dos operaciones. Doble Inclusión. Nivel II.
- Tarea competencial.

Anotaciones

EL SISTEMA DE NUMERACIÓN



La historia del cero

Distintas civilizaciones, en sus orígenes, usaban representaciones gráficas para expresar los números. Sin embargo, el cero no estuvo incluido como número desde el primer momento. La razón era que al no existir nada, o el vacío, no veían la necesidad de darle un valor numérico.

No se sabe cuándo apareció el cero por primera vez, ya que más de una civilización desarrolló el concepto de cero de distintas formas:

- Los babilonios, en el año 500 a. C., usaban un símbolo de dos cuñas oblicuas para indicar si un determinado orden era vacío; solamente alrededor de los años 200 al 300 d. C. comenzaron a utilizar un símbolo para representar el número cero.
- Por su parte, los mayas, allá por el año 350 a. C., usaban un símbolo con una forma parecida a un ojo.
- Los chinos, hasta el siglo VIII, dejaban una posición vacía en el ábaco, que era la nada (cero), y que suprimieron cuando empezaron a usar un signo redondeado.
- También los griegos usaron una letra de su alfabeto para indicar la nada.
- Los hindúes, pueblo al que se le atribuye la invención de los actuales números, usaban el cero con la representación de un huevo de ganso. Sobre este signo en forma de huevo, los hindúes pusieron el nombre *sunya*, que en árabe se traduce como *sifr* y en latín como *zephirum*. Cambios sucesivos de esas palabras llevaron a la denominación de cifra y de cero.

1. ¿Cuál era la razón por la que las primeras civilizaciones no usaban el cero?

2. En el texto, se habla de varias civilizaciones que terminaron usando el cero. ¿Conoces alguna civilización que hayas estudiado que no usara el cero?

3. No hemos nombrado a los egipcios. Investiga si usaban el cero; si lo usaban, cómo era, qué nombre tenía y otros datos curiosos.

Pág. 4 **Sugerencias metodológicas**

Iniciamos la unidad con la historia del cero. El docente debe dejar muy claro que no existe una fuente exacta que nos indique dónde y cuál fue el momento exacto de la aparición del cero y que partimos de teorías y no tanto de hechos probados.

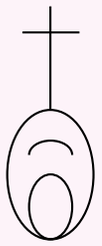
Un aspecto importante sobre la historia del cero es plantear cómo creen ellos que se trabajaba con los números antes de la introducción del cero, tal como nosotros lo usamos, por el matemático italiano Fibonacci (hacia 1170-hacia 1250), quien, a su vez, lo importó de los árabes que, por su parte, lo adoptaron de los índicos o indios.

Soluciones

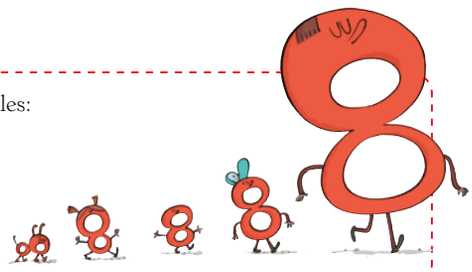
1. Al no existir nada, o solo el vacío, no veían la necesidad de darle un valor numérico.

2. Cualquiera de estas: romana, griega, azteca o sumeria.

3. Los egipcios no tenían el cero como número, ya que no necesitaban representar con un símbolo la falta de unidades en un orden determinado. Sin embargo, en la escritura sí existía un símbolo para representar la palabra «cero» denominado «nfr» y cuyo símbolo era:



Repaso de numeración



Vamos a recordar cómo se leen los números decimales:

8,8 → Ocho enteros con ocho décimas
8,08 → Ocho enteros con ocho centésimas
8,008 → Ocho enteros con ocho milésimas

1 Sustituye las letras por el número que corresponda según el siguiente abecedario y escríbelo en tu cuaderno (en cifra y en letra).

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	Ñ	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27

a) Tu nombre y el nombre de tu localidad.

b) El nombre más largo que haya entre las personas de tu clase.

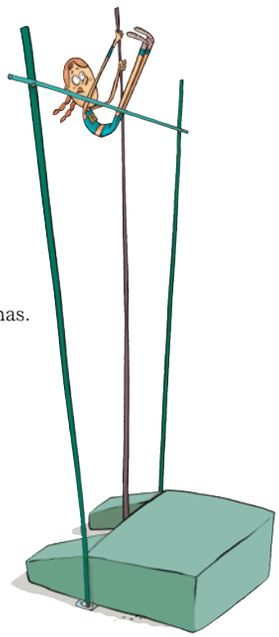
2 Escribe el número y descifra las palabras que oculta el número con el abecedario del ejercicio anterior. Observa el ejemplo.

a) Un millón novecientos cincuenta y dos mil ciento dieciséis → 1 952 116

Si vas probando, verás que la solución más lógica te da como resultado:

19 = R, 5 = E, 21 = T, 16 = O; la palabra oculta es «reto».

b) Trece mil quinientos veinte.



3 Escribe en tu cuaderno, con cifras, los números decimales siguientes.

a) Un entero y una décima.
b) Cien enteros y una milésima.
c) Un entero y once milésimas.
d) Diez enteros y una centésima.
e) Once enteros y once centésimas.
f) Ciento once enteros y once milésimas.

4 Escribe los números teniendo en cuenta sus órdenes de magnitud.

a) Ciento una centésimas.
b) Una decena y diez centésimas.
c) Una decena y diez décimas.
d) Una decena y cien milésimas.

5 Intercala tres números entre las siguientes cantidades.

a) 20 y 30
b) 0,2 y 0,3
c) 1 y 0,1
d) 0,26 y 0,31
e) 0,11 y 0,1
f) 0,45 y 0,442

Anotaciones

Pág. 5 Sugerencias metodológicas

Repasamos conocimientos que el alumnado ya domina de cursos anteriores y para ello empezamos con un juego en el que a cada letra ha de asignársele un número en el orden alfabético. Con los ejercicios propuestos se busca que escriban en formato numérico y en letra los números que les surjan.

Soluciones

1. Respuesta abierta según el nombre del alumno o de la alumna y localidad.

2. b) 13 - 5 - 20 → **mes**

3. a) 1,1
b) 100,001
c) 1,011
d) 10,01
e) 11,11
f) 111,011

4. a) 1,01 b) 11,0* c) 10,10* d) 10,100*

*Si fuese necesario para la comprensión del concepto, póngase el cero decimal.

5. Respuesta libre. Por ejemplo:

a) 20 - **21** - **22** - **23** - 30
b) 1 - **0,8** - **0,7** - **0,4** - 0,1
c) 0,11 - **0,103** - **0,102** - **0,101** - 0,1
d) 0,2 - **0,21** - **0,22** - **0,23** - 0,3
e) 0,26 - **0,27** - **0,28** - **0,29** - 0,31
f) 0,45 - **0,445** - **0,444** - **0,443** - 0,442

Pág. 6 Sugerencias metodológicas

Suele sorprender el tratamiento que se hace aquí de los órdenes de magnitud, flexibilizándolos y utilizándolos tomando como referencia cualquiera de ellos. Cuando se les pregunta a los alumnos no entrenados que nos señalen cuál es la décima de la unidad de mil, o la centena de la décima, quedan profundamente extrañados, pues no les cabe en la cabeza que los nombres de las unidades que están referidos a las Unidades puedan cambiar de referencia. Cuando se les aclara la cuestión y se explica disponiendo de dos filas superpuestas con los órdenes de magnitud, como las que aparecen en la cabecera de esta página, entonces comprenden todo y ya son capaces de responder a cualquier cuestión que se les plantee. A veces basta con que recuerden que cuando expresan las unidades de medida en forma incompleja hacen esto mismo que ahora se le explica. La distancia de 3 km, 4 hm y 8 m es, en incomplejos de hectómetros, 34,08.

Se les ha de hacer ver a los niños que no todo lo que se puede expresar con números necesita de que se tenga que tomar de referencia una unidad fija. Ejemplos de ello son cómo expresar la distancia del Sol a la Tierra o la composición en miligramos de un determinado medicamento. La Tierra dista del Sol aproximadamente 152 000 000 km (ciento cincuenta y dos millones de kilómetros). Es más sencillo escribir que la distancia es de 152 millones de kilómetros. En el ejemplo anterior el 2 es la cifra de las unidades, sí, pero de las unidades de millón. Y si un medicamento tiene 5,550 miligramos de una sustancia medicinal, es más fácil expresarlo así que escribiendo: 0,00555 gramos. Con la abreviación anterior las unidades son los miligramos, las décimas son las diezmilésimas de gramo y las centésimas las cienmilésimas de gramo.

Los tres primeros ejercicios se pueden hacer en equipo o por parejas. Pero el cuarto se recomienda que se haga en gran grupo. El docente ha de aprovechar para introducir más ejercicios de los que aparecen en el libro. Se trata de que los alumnos automaticen el proceso y alcancen un gran automatismo en las nuevas equivalencias de los órdenes de magnitud.

Unidades arbitrarias en el sistema de numeración

Al igual que en el curso anterior, vamos a trabajar con órdenes de magnitud, pero lo vamos a hacer cambiando la posición de uno de ellos para descubrir qué ocurre con el resto.

Por ejemplo, vamos a tomar la centésima como si fuera la unidad. Es decir 100 veces más pequeña. Fíjate en el dibujo. Hemos hecho coincidir la unidad con la centésima, una sobre la otra, y ya sabemos las equivalencias de las demás.

1 Si la centésima es la unidad, responde qué serían.

a) La d es la D
b) La m es …
c) La UM es …
d) La U es …

2 En esta ocasión un orden menor se convierte en un orden mayor. Si la milésima es ahora la unidad.

a) La centésima es …
b) La décima es …
c) La unidad es …

3 Ahora lo vamos a hacer con dinero. Si 1 € es ahora un billete de 100 €, ¿qué serán estas cantidades?

a) Una moneda de 0,10 € será …
b) Un billete de 10 € será …
c) Una moneda de 0,01 € será …
d) Un billete de 5 € será …

4 Responde en tu cuaderno a las siguientes preguntas.

a) ¿Cuál sería la centésima de la UM? Sería 100 veces menor, es decir: 1 D.
b) ¿Cuál sería la centésima de la C?
c) ¿Cuál sería la milésima de la UM?
d) ¿Cuál sería la décima de la DM ?

6

Soluciones

1. b) CM c) d d) C
2. a) D b) C c) UM
3. a) 10 €. b) 1 000 €. c) 1 €. d) 500 €.
4. b) La U. c) La U. d) La UM.

Cifra de..., número de... y número total de...

A lo largo de los cursos de Primaria has aprendido a distinguir entre «la cifra de…» y «el número de…».

Las cifras en nuestro sistema decimal son solo diez (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9) y los números se forman a partir de esas cifras. En el ejemplo de 25 768, las respuestas a esas preguntas serían:

- La cifra de las centenas es la que ocupa ese lugar, es decir, el 7.
- El número de centenas son todas las centenas que tiene ese número, es decir 257.

Ahora vamos a aprender un concepto nuevo: «El número total de…».

En el ejemplo anterior, 25 768, hemos visto que hay 257 centenas. Pero, ¿qué son los 68 que no hemos cogido? Son las unidades que quedan y que no han llegado a formar una centena más. Faltan para formar una decena más 32 unidades.

Por tanto, si queremos saber el número total de centenas (incluyendo la parte que no ha llegado a formar centena), debemos expresarlo con decimales, y la respuesta sería 257,68 C.

1 Escribe en tu cuaderno lo que se indica en cada caso.

a) Cifra de las D y el número de D en el 7 832.

b) Cifra de las C y el número de C en el 1 068.

c) Cifra de las UM y el número de UM en el 86 023.

2 En las cantidades del ejercicio anterior, indica el número total de.

a) decenas b) centenas c) unidades de millar

3 Indica la cantidad que falta en cada una de las cantidades del ejercicio 1 para formar un orden de magnitud mayor.

a) Unidades que faltan para una nueva decena.

b) Unidades que faltan para una nueva centena.

c) Unidades que faltan para una nueva unidad de millar.

4 Indica la cifra de…, el número de…, el número total de… y lo que falta para formar un nuevo orden de magnitud de los siguientes números.

a) De C en el 2 345.

b) De UM en el 36 709.

c) De D en el 512,3.

Anotaciones

Pág. 7 Sugerencias metodológicas

El contenido de esta página está muy ligado al anterior. En los cursos anteriores los alumnos han aprendido a diferenciar entre el número de y la cifra de. Así, en el número 456 hay 45 decenas, pero la cifra de las decenas es el 5. Ahora bien, estaba sin contestar otra pregunta: ¿cuál es el número total de decenas que tiene ese número? La respuesta es sencilla: 45,6 decenas. Ahora preguntamos por el número total de centenas que tiene el número 326 184. Pues ese número de centenas es 3261,84. En resumidas cuentas, el número total de un determinado orden de magnitud no es más que el número que se considere en el que se toma como unidad el orden de magnitud por el que preguntamos: la distancia de la Tierra al Sol es de 152 000 000 km, y preguntamos por el número total de decenas de millón de ese número. Es, naturalmente, 15,2.

Todos los ejercicios conviene realizarlos en parejas, pues así aumenta la posibilidad de que se den cuenta los alumnos de los errores que se cometen.

Ejercicio 1. Es un ejercicio de repaso de nociones pertenecientes a cursos anteriores: número de y cifra de.

Ejercicio 2. Es de aplicación del nuevo concepto. Si se ha entendido bien, es muy sencillo.

Ejercicio 3. Interesante y completo, pues el alumno ha de buscar, en los correspondientes nuevos órdenes de magnitud, lo que falta para completar un nuevo orden de magnitud. Así, si en la letra a) del ejercicio 1 hay un total de 78,32 decenas, faltan 1,8 unidades para formar una nueva decena.

Ejercicio 4. Un ejercicio sencillo de práctica de los contenidos de esta página.

Soluciones

1. a) Cifra 3 número de decenas 783.

b) Cifra 0 número de centenas 10.

c) Cifra 6 número de centenas 86.

2. a) 783,2 b) 10,68 c) 86,023

3. a) 1,8 b) 32 c) 977

4. a) La cifra de C es 3; el número de C es 23 y el número total de C es 23,45.

b) La cifra de UM es 6; el número de UM es 36 y el número total de UM es 36,709.

c) La cifra de D es 1; el número de D es 51 y el número total de D es 51,23.

Anotaciones

Suma de paquetes de números

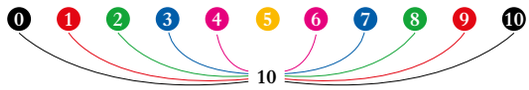
Si el número es par

Cuando tenemos un grupo de números consecutivos y queremos saber su suma, no es necesario sumarlos uno a uno. Observa cómo hacerlo:

¿Cuánto vale la suma de los diez primeros números?

1. Buscamos el número que está en la mitad de 1 y 10. Este número es el 5.
2. Se forman cinco parejas de números cuya suma es 10:

$$(6 + 4) + (7 + 3) + (8 + 2) + (9 + 1) + (10 + 0)$$



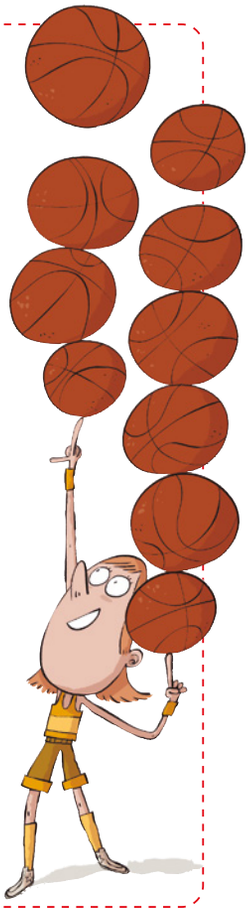
3. Como la suma de cada una de las parejas es 10, se multiplica por el número de parejas (5): $10 \times 5 = 50$.
4. Le sumamos 5 (la mitad entre el 1 y el 10). El resultado es: $50 + 5 = 55$.

¿Cuánto vale la suma de los veinte primeros números?

1. Buscamos el número que está en la mitad, el 10.
2. Se forman diez parejas de números cuya suma es 20:

$$(20 + 0) + (11 + 9) + (12 + 8) + \ldots$$

3. Como la suma de cada una de las parejas es 20, se multiplica por el número de parejas (10): $20 \times 10 = 200$.
4. Le sumamos 10. El resultado es: $200 + 10 = 210$



1. Con este método podemos calcular la suma de cualquier paquete de números. Practícalo en tu cuaderno, fijándote en el ejemplo.

SUMA DE LOS PRIMEROS 140 NÚMEROS	SUMA DE LOS PRIMEROS 120 NÚMEROS
1.º Calculamos la mitad: 70	1.º Calculamos la mitad: …
2.º Se forman 70 parejas de números cuya suma es 140	2.º Se forman … parejas de números cuya suma es …
3.º Multiplicamos $70 \times 140 = 9\,800$	3.º Multiplicamos … × … = …
4.º Sumamos la mitad de 140: $9\,800 + 70 = 9\,870$	4.º Sumamos la mitad de … : … + … = …

Pág. 8 Sugerencias metodológicas

Se aborda la suma de paquetes o secuencias de números que siempre empiezan en uno. Es decir, lo que suman los doce primeros números o los veinte primeros números. Lo más interesante de todo es que los alumnos y las alumnas entiendan la sistematización que supone la descomposición de ese número en sus parejas complementarias, o parejas de números que sumen el número dado. Hemos comprobado que este contenido lo asimilan bien, partiendo del dominio que tienen de los amigos de los números. En los números pares, por ejemplo, en el caso del 16, quedaría así el conjunto de parejas:

16 + 0
15 + 1
14 + 2
13 + 3
12 + 4
11 + 5
10 + 6
9 + 7
8

Si se fijan, ven que están todos los números del 1 al 16, y todos sumados. Falta la pareja del 8 + 8. Pero es que, si se contara, habríamos sumado el número 8 dos veces. Por ello es por lo que se aparta ese número (que es siempre la mitad) y se suma al resultado final.

En el ejercicio 1, es muy importante que los escolares:

1.º Hagan y entiendan el sumatorio de la primera tabla (del 70).

2.º Que, tomando como pauta la tabla del sumatorio del 70, realicen el sumatorio de los 120 primeros números.

Han de entender el proceso, antes que hacer cálculos. Por ello, si la realización de los cálculos obstaculizara la ejecución de la tarea, no hay inconveniente en que utilicen la calculadora. La solución es 7 260.

Soluciones

1. $7\,200 + 60 = 7\,260$

Si el número es impar

¿Cuánto vale la suma de los quince primeros números?

1. Apartamos el número 15.
2. Se forman siete parejas que suman 15:
   (14 + 1) + (13 + 2) + (12 + 3) + …
3. Como la suma de cada una de las parejas es 15, se multiplica por el número de parejas (7): 15 × 7 = 105.
4. Por último, sumamos 15 y obtenemos el resultado: 105 + 15 = 120.

2 Usa la calculadora para hallar la suma de los primeros...

a) … cuarenta números.
b) … cien números.
c) … nueve números.
d) … treinta y tres números.
e) … ochenta números.
f) … setenta y cuatro números.
g) … diecisiete números.
h) … doscientos un números.

Cómo averiguar la suma de un paquete de números conociendo las sumas correspondientes a un número anterior o posterior.

Si sabemos que la suma de los 6 primeros números es 21, para la suma de los 7 primeros números habría que sumar 7 a 21.

Y para saber la suma de los cinco primeros números, habría que restarle 6 a 21.

3 Observa la siguiente tabla y comprueba que la regla anterior se cumple. A continuación, responde en tu cuaderno.

a) ¿Cuál es la suma de los once primeros primeros números?
b) ¿Cuál es la suma de los doce primeros números?
c) ¿Cuál es la suma de los catorce primeros números?
d) Sabiendo que la suma de los 22 primeros números es 253, ¿cuál será la suma de los 23 primeros números? ¿Y la de los 21 primeros?

PAQUETE DE LOS PRIMEROS…	SUMA DE TODOS LOS NÚMEROS DEL PAQUETE
2 números	3
3 números	6
4 números	10
5 números	15
6 números	21
7 números	28
8 números	36
9 números	45
10 números	55

Anotaciones

Ejercicio 2. Es de aplicación de los sumatorios de números pares y de números impares. Han de usar la calculadora para las cantidades grandes y hallar las sumas.

Ejercicio 3. Se debe insistir en que vean cómo a partir del sumatorio de cualquier número se llega a construir el de los demás.

Soluciones

2. a) 20 × 40 + 20 = 820
b) 50 × 100 + 50 = 5 050
c) 4 × 9 + 9 = 45
d) 16 × 33 + 33 = 561
e) 40 × 80 + 80 = 3 280
f) 37 × 74 + 37 = 2 775
g) 8 × 17 + 17 = 153
h) 100 × 201 + 201 = 20 301

3. a) 55 + 11 = 66
b) 66 + 12 = 78
c) 78 + 13 + 14 = 105
d) 253 + 23 = 276; 253 – 22 = 231

Actividad de ampliación

A los escolares más aventajados se les puede proponer que averigüen cuánto suma la serie de números que va desde el 21 hasta el 50. Se les deja que lo hagan con la calculadora, para que se puedan concentrar exclusivamente en el cálculo. Caso de que no lo descubran por ellos mismos, se les da la pista: sumarán lo mismo que si al sumatorio de 50 le quitamos el sumatorio de 20.

Por ejemplo, ¿cuánto suman los números consecutivos que van del 64 al 89?

1.º Hallamos el sumatorio del 89 = 4 005.

2.º Hallamos el sumatorio del 63 = 1 985.

3.º Se realiza la sustracción: 4 005 – 1 985 = 2 020.

Pág. 9 Sugerencias metodológicas

16	15
16 + 0	14 + 1
15 + 1	13 + 2
14 + 2	12 + 3
13 + 3	11 + 4
12 + 4	10 + 5
11 + 5	9 + 6
10 + 6	8 + 7
9 + 7	
8	15

Ahora se trata el caso de los sumatorios de números impares. Para que los alumnos y las alumnas sistematicen, se ha de insistir en la diferencia entre el procedimiento anterior sobre los números pares y este de los impares. La tabla siguiente, comparativa, puede ayudar.

En los números pares se aparta el que es su mitad, y en los impares, es el propio número. En el caso de 22, no entraría el 11; serían once parejas que suman 22. En el caso de 23, no entraría el 23; serían once parejas que suman 23.

Pág. 10 Sugerencias metodológicas

Las dos páginas se ocupan del procedimiento para establecer la sucesión de números conociendo su suma. Sería el típico problema:

«La suma de cinco números consecutivos es 40. ¿De qué números se trata?».

La forma tradicional de abordar este problema ha sido una ecuación de primer grado: $x + x + 1 + x + 2 + x + 3 + x + 4 = 40$. Reagrupando, tendríamos: $5x + 10 = 40$.

El siguiente paso sería: $5x = 30$. Finalmente, el número sería el 6 ($x = 30/5$). En efecto, la sucesión es 6-7-8-9-10, cuya suma es 40.

En ABN abordamos la cuestión de otra forma. Los alumnos ya saben que cualquier sucesión de números es equivalente, por transformación, a otra serie, que consta de la repetición de la misma cantidad de números iguales. Se obtienen esos números iguales repartiendo e igualando. Véase el ejemplo con los números anteriores.

Partimos de…	El 9 le da al 7…
6-7-8-9-10	6-8-8-8-10

El 10 le da al 6…	Queda al final…
8-8-8-8-8	8-8-8-8-8

Por lo anterior, en ABN el problema se plantea en términos más sencillos:

40 : 5 = 8. A partir del 8 se construye la serie. El 8 queda en el centro y la serie es: 6-7-8-9-10.

Otro ejemplo: «La suma de siete números consecutivos es 56. ¿Qué números son?». Averiguamos el número central con la división 56 : 7, que es igual a 8. 8 es el número central y la sucesión queda: 5-6-7-8-9-10-11.

La página 10 se completa con el estudio de la sucesión de números en cantidad par, que no tienen un número central. En la sucesión 4-5-6-7 no hay un número central. Pero el número central debe estar entre el 5 y el 6 y, por tanto, debe ser 5,5. Si lo multiplicamos por los cuatro números tendremos una suma de 22. Y esa es la suma. Por consiguiente, el procedimiento no se aparta del que ya hemos explicado. Lo que ocurre es que aquí la sucesión se debe montar a partir del número decimal que se obtiene en el cociente, y que no debe aparecer en la misma. Veamos otro ejemplo: «La suma de seis números consecutivos es igual a 51. ¿De qué números se trata?».

Solución: 51 : 6 = 8,5. La serie es 6-7-8-9-10-11.

Los números consecutivos que forman una suma

Cuando tenemos la suma de varios números consecutivos, es sencillo averiguar de qué números se trata. Lo primero es saber si el total de números consecutivos es un número par o impar, ya que, aunque el procedimiento es muy parecido, no es exactamente igual.

Con una cantidad impar de números

La suma de tres números consecutivos es 27. ¿De qué números se trata? Como son tres números los que buscamos, la cantidad es impar y lo hacemos de la siguientes forma:

…+ … + … = 27

1. Repartimos la cantidad entre tres grupos, 27 : 3, quedando cada grupo con 9.
2. Como hemos indicado que la cantidad es impar, el número central será el 9.
3. También sabemos que son números consecutivos, por lo que antes del 9 irá el 8 y después del 9 deberá ir el 10.

8 + **9** + 10 = 27

1 Averigua de qué números se trata.

a) La suma de cinco números consecutivos es 30. ¿Qué números son?

b) ¿Y si la suma de los cinco números consecutivos fuera 50?

c) ¿Cuáles son los siete números consecutivos que suman 35?

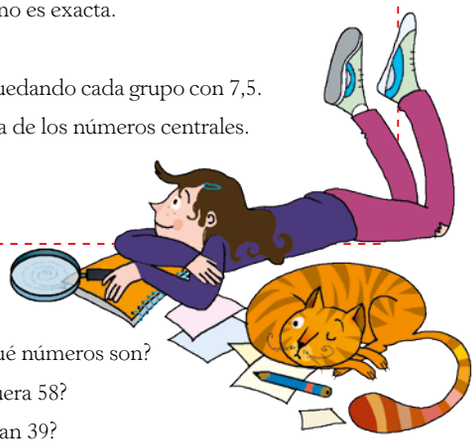
Con una cantidad par de números

La suma de cuatro números consecutivos es 30. ¿De qué números se trata? El procedimiento es parecido al anterior, pero ahora la división no es exacta.

… + … + … + … = 30

1. Repartimos la cantidad entre cuatro grupos, 30 : 4, quedando cada grupo con 7,5.
2. Como la cantidad es par, ponemos el 7 a la izquierda de los números centrales.
3. Al ser números consecutivos, quedaría así:

6 + **7** + 8 + 9 = 30



2 Averigua de qué números se trata.

a) La suma de cuatro números consecutivos es 18. ¿Qué números son?

b) ¿Y si la suma de los cuatro números consecutivos fuera 58?

c) ¿Cuáles son los seis números consecutivos que suman 39?

10

Soluciones

1. a) 4 + 5 + 6 + 7 + 8

b) 8 + 9 + 10 + 11 + 12

c) 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8

2. a) 3 + 4 + 5 + 6

b) 13 + 14 + 15 + 16

c) 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9

Conocida una suma, averiguar los números pares o impares consecutivos que la forman

A diferencia de lo que hemos dicho anteriormente, ahora no se trata de buscar solo números consecutivos, sino de que dichos números sean todos pares o impares. Por ejemplo, son pares consecutivos el 2, 4, 6, 8 e impares consecutivos 3, 5, 7, 9… Veamos algunos casos:

Con números consecutivos impares:

La suma de tres números consecutivos impares es 27. ¿Qué números son?

Procedemos igual que antes: … + … + … = 27

1. Repartimos la cantidad entre tres grupos, 27 : 3, quedando cada grupo con 9.
2. 9 es impar, y queda en el centro.
3. Además, los otros dos también deben ser impares, por tanto, el impar antes del 9 es el 7 y el impar después del 9 es el 11.

$$7 + \mathbf{9} + 11 = 27$$

1 Averigua de qué números se trata.

a) La suma de 3 números impares consecutivos es 33. ¿Qué números son?

b) ¿Y si la suma de los 3 números impares consecutivos fuera 69?

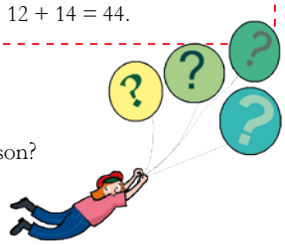
c) ¿Cuáles son los 5 números impares consecutivos que suman 35?

Con números consecutivos pares

La suma de cuatro números consecutivos pares es 44. ¿De qué números se trata? El procedimiento es parecido al anterior, pero ahora la división no es exacta.

… + … + … + … = 44

1. Repartimos la cantidad entre cuatro grupos, 44 : 4, quedando cada grupo con 11.
2. Como la cantidad debe ser par, tomamos el par anterior al 11 y lo situamos a la izquierda de los números centrales.
3. Al ser el resto números pares consecutivos, quedaría así: 8 + **10** + 12 + 14 = 44.



2 Averigua de qué números se trata.

a) La suma de 4 números consecutivos pares es 28. ¿Qué números son?

b) ¿Y si la suma de los 4 números pares consecutivos fuera 60?

c) ¿Cuáles son los 6 números pares consecutivos que suman 42?

Anotaciones

Pág. 11 Sugerencias metodológicas

En la página 11 se estudia la técnica a seguir cuando se pregunta por números consecutivos pares o impares. En ambos casos no hay una sucesión de uno en uno, sino de dos en dos. Véanse estos dos ejemplos:

1. La suma de cinco números consecutivos impares es de 35. ¿Qué números son?

2. La suma de cinco números consecutivos pares es de 30. ¿Qué números son?

En ambos ejemplos se aplica la misma técnica. Véase:

35 : 5 = 7. La respuesta es 3-5-7-9-11.

30 : 5 = 6. La respuesta es: 2-4-6-8-10.

Si ambos ejemplos se dieran con una cantidad par de números, habría que buscar el número intermedio, a partir del cual se montaría la sucesión:

1. La suma de seis números consecutivos impares es 72. ¿Qué números son?

Solución: 72 : 6 = 12. La respuesta es 7-9-11-13-15-17.

2. La suma de seis números consecutivos pares es 66. ¿Qué números son?

Solución: 66 : 6 = 114. La respuesta es 6-8-10-12-14-16.

Soluciones

1. a) 9 + 11 + 13

b) 21 + 23 + 25

c) 3 + 5 + 7 + 9 + 11

2. a) 4 + 6 + 8 + 10

b) 12 + 14 + 16 + 18

c) 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12

Anotaciones

Numeración egipcia

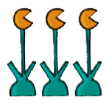
Los egipcios, al igual que nosotros, tenían un sistema de numeración en base 10, aunque usaban signos distintos y no seguían un orden posicional como el nuestro. Estos eran sus signos:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 100 1 000 10 000 100 000 1 000 000

1 ¿Qué número representan los siguientes signos egipcios?

a)

c)

e) 

g)

b)

d)

f)

h)

2 Escribe en números egipcios.

a) El año en el que estamos. b) Tu edad. c) El número 2 134 544.

El producto egipcio

23	13
23	1
46	2
92	4
184	8
368	16

1. Vamos a multiplicar 23 × 13. Se escriben en **dos columnas** el multiplicando y el multiplicador.
2. Debajo de la columna izquierda se escribe otra vez el primer número, y debajo de la columna de la derecha se escribe un 1.
3. Se van doblando los números hasta que en la columna de la derecha quede un número por debajo del multiplicador (en el ejemplo, el 8).

Como multiplicar por 13 es lo mismo que multiplicar por 1, por 4 y por 8 y sumar sus productos, se identifican esos productos y se suman. En nuestro ejemplo sumamos los productos que son 23, 92 y 184.

Este es el resultado: 23 × 13 = 299

3 Calcula mediante el producto egipcio las siguientes operaciones.

a) 48 × 3 b) 216 × 5 c) 12 × 21

Pág. 12 Sugerencias metodológicas

Respecto a la numeración egipcia, solo vimos en 5.º el producto egipcio como un ejemplo más de que existen otras formas de multiplicar además de las habituales y hacemos un recordatorio. En esta ocasión, trabajamos la numeración, que aunque comparte con la nuestra el agrupamiento en base 10, lo realiza de forma distinta, además, sin disponer del número cero como tal.

Soluciones

1. a) 7 e) 3 000
b) 40 000 f) 400
c) 2 210 000 h) 2 000 000
d) 2 330 g) 1 040

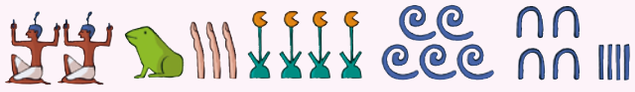
2. a) Por ejemplo, el año 2017:

b) Las edades posibles de los escolares de clase son:

11 años:

12 años:

13 años:

c) 

3. Calcula mediante el producto egipcio las siguientes operaciones:

a) 1 + 2 = 3, por tanto, el producto es 48 + 96 = 144

48	1
96	2
192	4

b) 1 + 4 = 5, por tanto, el producto es 216 + 864 = 1 080

216	1
432	2
864	4

c) 1 + 4 + 16 = 21, por tanto, el producto es 12 + 48 + 192 = 252

12	1
24	2
48	4
96	8
192	16

Numeración romana

La numeración romana utiliza siete letras mayúsculas, a las que corresponden los siguientes valores:

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

REGLAS DE LA NUMERACIÓN ROMANA		
Los símbolos se escriben y se leen de izquierda a derecha empezando por los de mayor valor. Por ejemplo, CM → 900 (a mil le quitamos 100).	Los símbolos I, X y C, colocados a la izquierda de otro mayor, se restan. Por ejemplo, 9 → IX, 40 → XL, 400 → CD.	Los símbolos I, X, C y M pueden repetirse tres veces de forma consecutiva. Por ejemplo, 30 → XXX, 200 → CC.
Los símbolos V, L y D nunca se restan (no pueden estar a la izquierda de otro mayor).	La cantidad total se obtiene sumando los valores de los números que lo componen, salvo en los casos en que resta. Por ejemplo, 2 016 → MMXVI.	El I puede restar a V y X. El X puede restar a L y C. El C puede restar a D y M. Por ejemplo, 4 → IV, 40 → XL.
Los símbolos I, X y C, colocados a la izquierda de otro mayor para restar, no pueden estar repetidos.	Los símbolos V, L y D no pueden repetirse de forma consecutiva.	El valor de los números romanos queda multiplicado por mil tantas veces como rayas horizontales se coloquen encima de los mismos. Por ejemplo, 4 000 → $\overline{\text{IV}}$.

1 ¿A qué número corresponden los siguientes números romanos?

a) VI c) XXI e) CM g) XC i) CD

b) XXXIII d) XXXIV f) XIX h) $\overline{\text{VI}}$ j) $\overline{\text{IX}}$

2 Escribe en tu cuaderno estos números en números romanos.

a) 67 c) 4 e) 9 g) 40 i) 13

b) 14 d) 54 f) 129 h) 4 000 j) 12 000

Anotaciones

Pág. 13 Sugerencias metodológicas

Los números romanos han sido trabajados suficientemente en cursos anteriores. En esta ocasión, se trata de recordar las normas de carácter general y aplicarlas con números hasta millares.

Actividades de ampliación

1. ¿Qué errores se han cometido en estos números romanos?

a) LL b) CXXXXII c) LD d) DD

2. ¿Cómo se puede escribir 450 en números romanos, si L no se puede iterar ni C se puede repetir más de tres veces?

Soluciones

1. a) Para el 100 existe C.
b) Se repite X cuatro veces.
c) L no se puede restar a D.
d) Para el 1 000 existe la M.

2. CDL

Soluciones

1. a) 6 c) 21 e) 900 g) 90 i) 400
b) 33 d) 34 f) 19 h) 6 000 j) 9 000

2. a) LXVII c) IV e) IX g) XL i) XIII
b) XIV d) LIV f) CXXIX h) $\overline{\text{IV}}$ j) $\overline{\text{XII}}$

Anotaciones

Jugamos con los números romanos

Con lo que ya sabemos de números romanos vamos a investigar un poco más para conocerlos mejor.

¿Cómo escribiremos el 99 en números romanos? ¿A 100 le quito 1 y sería **IC**, o a 100 le quito 10 y le sumo 9, es decir, **XCIX?**

La respuesta correcta es la segunda, porque, como has visto en la reglas, el I sólo puede restar al V y al X.

Una forma para que no te equivoques nunca es ir formando los números romanos conforme pronuncias los números, es decir: para el 99, primero dices 90, que es XC, y luego dices 9, que es IX, juntas ambos y ya lo tienes: XCIX.

1 Explica en tu cuaderno la forma correcta de escribir en numeración romana.

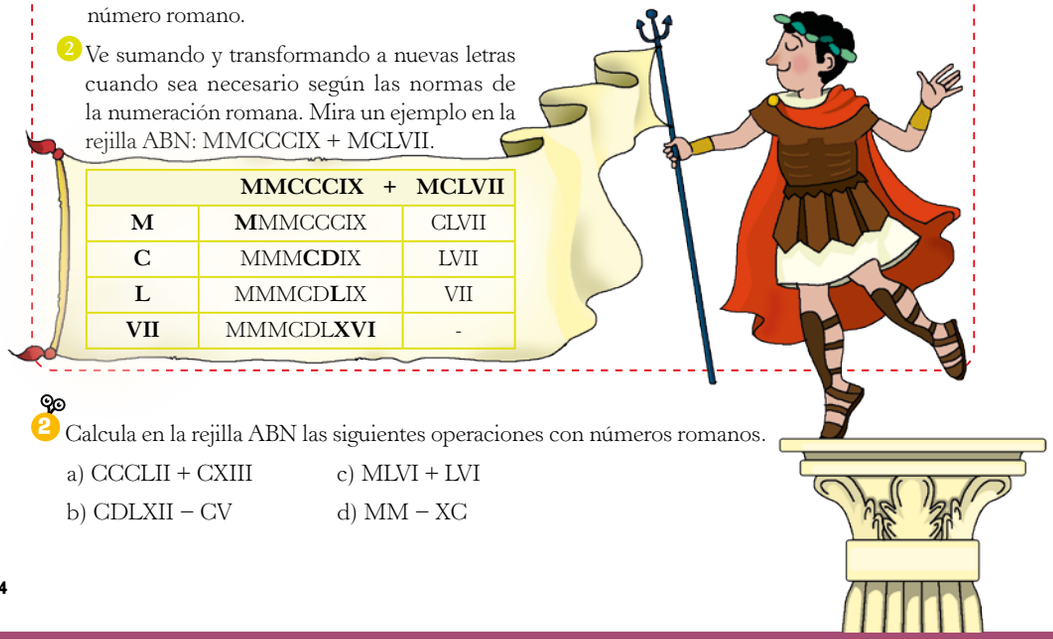
a) 490 → ¿XD o CDXC? b) 47 → ¿XLVII o VLII? c) 0 → ¿VV o VVX?

¿Cómo sumar o restar dos números escritos en romano? Pues puedes hacerlo de dos formas:

1 Pasa ambos números romanos a número arábicos, súmalos y vuelve a pasar el resultado a número romano.

2 Ve sumando y transformando a nuevas letras cuando sea necesario según las normas de la numeración romana. Mira un ejemplo en la rejilla ABN: MMCCCIX + MCLVII.

	MMCCCIX + MCLVII	
M	**M**MMCCCIX	CLVII
C	MMM**CD**IX	LVII
L	MMMCD**L**IX	VII
VII	MMMCDL**XVI**	-



2 Calcula en la rejilla ABN las siguientes operaciones con números romanos.

a) CCCLII + CXIII c) MLVI + LVI

b) CDLXII − CV d) MM − XC

Pág. 14 Sugerencias metodológicas

La página se ocupa de uno de los casos más complejos que aparece en la numeración romana. Y lo es sobre todo por la diferencia que se presenta respecto a nuestra numeración decimal.

En efecto, nada hay parecido en la numeración decimal cuando se escribe el número anterior a un cambio de orden de magnitud, como sería el 9, el 90 o el 900. Por lo anterior se aconseja al docente:

1. Que haga notar a los alumnos que, como cada letra-número no se puede repetir más de tres veces, el problema se plantea a la hora de escribir el 4, el 9, el 40, el 90, el 400 y el 900.

2. Que la solución que le dieron los romanos fue restar la letra anterior a la nueva letra. Así, el 4 era el IV (literalmente, cinco menos uno), el 9 era el IX (literalmente, diez menos uno), el 40 era el XL (literalmente, cincuenta menos diez), etc.

3. Que plantee una cuestión a toda la clase, para ver qué solución le dan a los casos relacionados con los anteriores: ¿cómo se escribe un número como el 409, que tiene repetida la situación que se acaba de explicar?

Al final se impondrá la solución más sencilla. Primero se escribirá el 400 (CD) y luego el 9 (IX). O sea: 409 = CDIX. ¿Y el 490? Pues será igual a CDXC. ¿Y el 499? Será CDXCIX.

Cuando se explique que el número 0 no existe en la numeración romana, se aprovechará para que los niños escriban en números romanos los que en nuestro sistema de numeración tienen ceros.

La segunda parte de la página se ocupa de las operaciones de sumar y restar con números romanos. Lo más simple es que los niños conviertan los números romanos en arábigos, los sumen o los resten, según se les pida, y el resultado lo vuelvan a pasar a números romanos.

Soluciones

1. a) CDXC
b) XLVII
c) El cero no existe en numeración romana.

2. a) CDLXV b) CCCLVII c) MCXIII d) MCMX

Repasamos PAEV2

¡Recuerda! Un problema de dos operaciones son dos problemas de una operación entrelazados. Al unirlos, han quitado la pregunta y la respuesta del primer problema. Para resolver un problema de dos operaciones debemos hallar primero la pregunta oculta.

Resuelvo problemas

1. Emma se ha comprado 5 *snacks* iguales en el *duty free* que le han costado 19 € en total. ¿Cuánto se hubiera gastado comprando 7 *snacks* iguales?

2. En uno de los restaurantes del aeropuerto, el menú cuesta 12 € y el menú con bebida incluida, 14 €. Un grupo de amigos ha pedido el menú con bebida. Si en total han pagado 16 € por las bebidas, ¿cuántos amigos han comido si cada uno ha pedido una bebida?

3. Un vehículo con 7 carritos transporta 350 maletas en total, todos con el mismo número de maletas. Se descargan varios carritos y ahora el vehículo transporta 200 maletas. ¿Cuántos carritos quedan por vaciar?

4. En una de las tiendas del aeropuerto se han vendido 60 paquetes de galletas. Cada paquete contenía 24 galletas, unas con cobertura de mermelada y otras no. Si en total se han vendido 360 galletas sin cobertura de mermelada, ¿cuántas galletas con cobertura se han vendido?

5. A un avión se han subido 200 maletas que pesan un total de 5 000 kg. Si todas las maletas pesasen lo mismo, ¿cuántas maletas podrían haber subido si la carga máxima fuera de 6 000 kg?

Invento, creo y razono

6. Inventa un problema de dos operaciones que se resuelva con una suma y una división utilizando algunas de las palabras propuestas a continuación.

aeropuerto | avión | pasajeros

Anotaciones

Pág. 15 Sugerencias metodológicas

Se inicia en esta página el repaso de las principales categorías y estructuras de problemas de dos operaciones, todas ellas trabajadas ampliamente en 5.º de Primaria. Se le debe recordar al alumnado que antes de proceder a la resolución de un problema de dos operaciones hay que hallar la pregunta oculta y responderla. Esto permitirá establecer el orden en el que se realizan las operaciones y se resuelve el problema.

Concretamente en esta página se recogen problemas de las categorías de compartir el todo (ej. 4) y compartir la parte (ej. 1-2-3-5). Finalmente, en el ej. 6 se propone que el alumnado invente un PAEV2 utilizando diferentes términos propuestos e indicando qué operaciones deben resolverlo.

Soluciones

1. 19 : 5 = 3,80 3,8 × 7 = 26,50 € en total.

2. 14 − 12 = 2 16 : 2 = 8 amigos.

3. 350 : 7 = 50 200 : 50 = 4 carritos.

4. 60 × 24 = 1 440

1 440 − 360 = 1 080 galletas con cobertura de mermelada.

5. 5 000 : 200 = 25 kg 6 000 : 25 = 240 maletas.

6. Respuesta abierta.

Anotaciones

Categoría doble inclusión: nivel I

Resuelvo problemas

1. El velero Orión recorre 115 millas el martes. Si hubiese recorrido 20 millas menos, habría recorrido la misma distancia que el lunes. ¿Qué distancia recorrió entre los dos días?

2. En la tienda de *souvenirs* del crucero venden un peluche de la mascota del barco por 15,60 €. Si una toalla cuesta la mitad, ¿cuánto dinero me gastaré si compro los dos artículos?

3. En la piscina grande del crucero se están bañando 84 personas y en la pequeña, cuatro veces menos. ¿Cuántos bañistas hay en total entre las dos piscinas?

4. En la cubierta superior de un crucero hay 785 personas, 450 más que en la cubierta inferior. ¿Cuántas personas en total hay entre las dos cubiertas?

5. En el buffet de hoy han servido 480 platos, tres veces más que ayer. ¿Cuántos platos han servido entre ayer y hoy?

6. El espectáculo de animación de esta noche ha tenido dos grandes actuaciones. Un cantante amenizó la velada durante 45 minutos, 10 minutos menos de los que duró la intervención del mago Lol. ¿Cuánto tiempo duró el espectáculo de animación? Expresa el resultado en horas y minutos.

Invento, creo y razono

7. Elige los razonamientos que resuelven este problema y cópialos en orden en tu cuaderno.

Tres hermanos (Axel, Hugo y Samuel) han ahorrado para irse de crucero. Axel ha ahorrado 2 100 €, 1 200 € más que Hugo, y Samuel, la tercera parte que Hugo. ¿Cuánto dinero han ahorrado en total?

1. Calcula el dinero que ha ahorrado Hugo.
2. Calcula la diferencia entre el dinero ahorrado por Hugo y el ahorrado por Samuel.
3. Suma el dinero ahorrado entre los tres.
4. Calcula el dinero ahorrado por Axel.
5. Calcula el dinero ahorrado por Samuel.

Pág. 16 Sugerencias metodológicas

Se repasa en esta página la categoría de PAEV2 de Doble Inclusión. Concretamente se trabajan los problemas más sencillos de dicha categoría, los denominados de nivel I, tanto en sus estructuras aditivas -aditivas como en sus estructuras aditivas-multiplicativas. Los problemas de esta categoría son bastante particulares puesto que a pesar de ser de dos operaciones tan solo tienen dos datos útiles en su enunciado, de manera que uno de ellos se incluye en ambas operaciones.

Estos problemas se trabajaron ampliamente en 5.º de Primaria, pero conviene que el docente los repase con vistas a trabajar problemas de más de dos operaciones que surjan de dicha categoría en unidades posteriores.

Hay que tener en cuenta que los problemas 4, 5 y 6 contienen PAEV1 incongruentes, de las categorías de CM, IG, EC y ED por lo que resultarán más complejos de resolver. Se cierra la página con una tarea que exige que el alumnado escoja los razonamientos para resolver un problema de tres operaciones relacionado con la categoría trabajada a lo largo de la página.

Soluciones

1. 115 − 20 = 95 95 + 115 = 210 millas.

2. 15,6 : 2 = 7,8 €/toalla 7,8 + 15,6 = 23,4 € en total.

3. 84 : 4 = 21 personas/pequeña 21 + 84= 105 bañistas en total.

4. 785 – 450 = 335 personas/cubierta inferior.
785 + 335= 1 120 personas.

5. 480 : 3 = 160 platos/ayer 160 + 480 = 640 platos en total.

6. 45 + 10 = 55 min/mago 55 + 45 = 100 min = 1 hora 40 minutos.

7. Razonamientos 1-5-3.

Categoría doble inclusión: nivel II

Resuelvo problemas

1. En el vagón cafetería se han vendido entre ayer y hoy 300 refrescos. Si ayer tan solo se vendieron 50, ¿cuántas veces más refrescos se han vendido hoy que ayer?

2. Dos trenes salen de la estación de Atocha llevando en total a 465 pasajeros. Si uno de los trenes transporta a 277 personas, ¿cuántos viajeros lleva un tren más que el otro?

3. Un tren ha realizado hoy dos trayectos cubriendo un total de 450 km. Si durante el primer trayecto recorrió tan solo 90 km, ¿cuántas veces menos km recorrió en el primer trayecto que en el segundo?

4. La estación de trenes de Valencia estuvo en obras durante 7 semanas y 5 días en total. Primero estuvieron 3 semanas y 5 días arreglando los baños y después, resto del tiempo, reparando la vía 1. ¿Cuántos días más deberían haber estado reparando los baños para haber tardado el mismo tiempo que con la vía 1?

5. Sandra se ha gastado 150 € comprando dos billetes de tren, uno para ella y otro para su hija. Si el billete de su hija le costó 25 €, ¿cuántas veces más caro fue el billete de Sandra que el de su hija?

6. En el viaje en tren entre Madrid y Castellón han puesto dos películas que han durado 3 horas y 15 minutos en total. Si la primera película ha durado 1 hora y 45 minutos, ¿cuánto tiempo menos ha durado la segunda película que la primera?

Invento, creo y razono

7. Relaciona los razonamientos que resuelven este problema con las operaciones correspondientes.

En un tren viajan 80 hombres, el doble de mujeres que de hombres y 64 niños menos que hombres. ¿Cuántas veces más mujeres que niños hay?

1. Calcula el número de mujeres.
2. Calcular el número de niños.
3. Calcular cuántas veces más mujeres que niños hay.

a) 160 : 16 = 10
b) 80 × 2 = 160
c) 80 : 2 = 40
d) 80 – 64 = 16

Anotaciones

Pág. 17 Sugerencias metodológicas

Se continúa repasando en esta página la categoría de PAEV2 de Doble Inclusión. Concretamente se trabajan los problemas denominados de nivel II, tanto en sus estructuras aditivas-aditivas como en sus estructuras aditivas-multiplicativas. Recordamos que estos problemas se trabajaron ampliamente en 5.º de Primaria, pero se repasan con vistas a trabajar problemas de más de dos operaciones que surjan de dicha categoría (como el que se plantea en el ej. 7).

Se recomienda utilizar el primer y segundo problemas como muestra y recordatorio de cómo resolver este tipo de situaciones. Por eso mismo están pautados para ser llevados a cabo en gran grupo. El docente deberá aprovechar estos dos primeros problemas para incidir en la diferencia entre preguntar por cuánto más/menos o por cuántas veces más/menos. Un término implica hallar la diferencia entre ambas cantidades y el otro ver cuántas veces «cabe» una cantidad dentro de la otra.

Soluciones

1.	300 − 50 = 250	250 : 50 = 5 veces más.
2.	465 − 277 = 188	277 − 188 = 89 más.
3.	450 − 90 = 360	360 : 90 = 4 veces menos.
4.	54 días − 26 días = 28 días	28 − 26 = 2 días más.
5.	150 − 25 = 125 €	125 : 25 = 5 veces más.
6.	195 minutos − 105 min = 90 min	105 − 90 = 15 minutos menos.
7.	1b, 2d, 3a.	

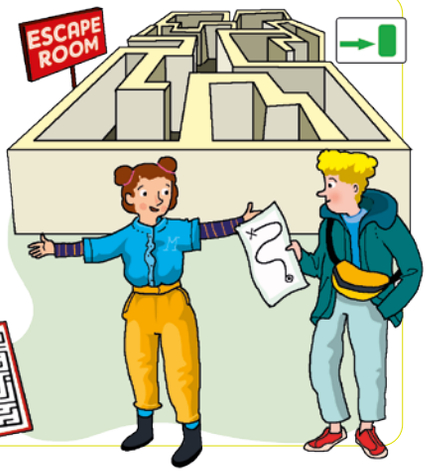
Anotaciones

TAREA COMPETENCIAL

Escape room

Hugo y sus amigos han decidido pasar la tarde del sábado de una forma diferente y han ido a una sala donde organizan un *escape room* sobre antiguas civilizaciones.

En este tipo de juegos los participantes deben ir descubriendo pistas, acertijos, enigmas o puzles que les permitan hallar la clave para salir de una o varias habitaciones. En este *escape room* tienen 15 minutos para encontrar la clave que les permita abrir la puerta de cada habitación.



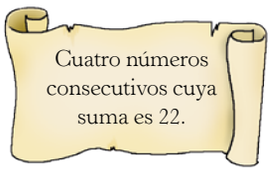
1 Al pasar a la primera sala, observan sorprendidos que está ambientada en el antiguo Egipto. Tras varios minutos pensando, encuentran una pista. Hugo cree que las fechas escritas en numeración egipcia son el código numérico que hay que introducir en el panel de la puerta. Indica qué número deberá introducir.

Pista: Número de tres cifras. La suma de sus cifras es ocho.

2 La segunda sala está ambientada en la antigua Roma. Cuatro columnas enormes y una pista hallada en una trampilla secreta son la clave del código que deberán introducir.

Pista: Número de cuatro cifras. La segunda cifra es la misma que la cuarta. La tercera, la mitad que la segunda.

3 Superadas las dos primeras salas, llegan a la tercera y última, que les traslada a la antigua Grecia. Tras un periodo de búsqueda entre multitud de objetos antiguos encuentran un pergamino que podría llevarlos a obtener el código necesario para abrir la puerta. ¿Qué dígitos deberán introducir?



18

Pág. 18 Sugerencias metodológicas

Presentamos en esta página la primera Tarea competencial del libro o primera Situación de aprendizaje. Lo que se busca en este apartado es que el alumnado ponga en práctica contenidos trabajados a lo largo de la unidad en una situación contextualizada que requiera el uso de dichos conocimientos y que resulte lo más novedosa posible.

Los ejercicios se deben resolver en el cuaderno del alumno. En este tipo de preguntas el alumnado suele elegir la opción que considera más adecuada sin justificación alguna, por eso el docente debe insistir en que se acompañe la elección de cada respuesta con el razonamiento matemático correspondiente.

Soluciones

1. 215

2. 1 424

3. Los números consecutivos serían el 4-5-6-7.

REPASO

1 Escribe con cifras los números siguientes.

a) Un entero y una centésima.

b) Ocho enteros y tres décimas.

c) Cien enteros y una centésima.

d) Doce enteros y veintiuna centésimas.

2 Intercala tres números entre las siguientes cantidades.

a) 2,01 y 2,1 c) 0,19 y 0,1

b) 0,01 y 0,1 d) 0,026 y 0,031

3 Nombra estas cantidades de cuatro formas distintas.

a) 29,47. Por ejemplo, podrían ser:
29,47 U; 2,947 D; 294,7 d; 2947 c

b) 9,873

c) 86,05

d) 0,26

4 Indica del 34 679.

a) ¿Cuál es la cifra de las C?

b) ¿Cuántas centenas tiene?

c) El número de centenas completas.

d) ¿Cuánto le falta para completar una centena más?

5 Usa la calculadora para las cantidades grandes y halla la suma de los primeros…

a) …28 números. c) …68 números.

b) …57 números. d) …117 números.

6 La suma de cuatro números consecutivos es 42.

a) ¿Qué números son?

b) ¿Y si la suma de los cuatro números fuera 62?

7 Calcula mediante el producto egipcio las siguientes operaciones.

a) 22 × 7 b) 31 × 8 c) 206 × 15

Anotaciones

Pág. 19 Soluciones

1. a) 1,01 b) 8,3 c) 100,01 d) 12,21

2. Respuesta abierta, se indican algunas posibles respuestas:

a) 2,02; 2,05 y 2,09 c) 0,11, 0,14 y 0,18

b) 0,011, 0,050 y 0,099 d) 0,027, 0,028 y 0,030

3. Respuesta abierta, se indican algunas posibles respuestas:

b) Por ejemplo: 9,873 U; 98,73 d; 987,3 c; 9 873 m.

c) Por ejemplo: 86,05 U; 860,5 d; 8,605 D; 8 605 c.

d) Por ejemplo: 0,26 U; 0,026 D; 2,6 d; 26 c.

4. a) 6 b) 346 c) 346,79 d) 0,21

5. a) 14 × 28 +14 = 406 c) 34 × 68 +34 = 2 346

b) 28 × 57 + 57 = 1 653 d) 58 × 117 + 117 = 6 903

6. a) 9 + 10 + 11 + 12 b) 14 + 15 + 16 + 17

7. a) 22 × 7

22	1
44	2
88	4
154	**7**

b) 31 × 8

31	1
62	2
124	4
248	8
248	**8**

c) 206 × 15

206	1
412	2
824	4
1 648	8
3 090	**15**

2 POTENCIAS

Presentación de la unidad

Esta segunda unidad presenta un contenido nuevo, como son las potencias. Tras la presentación, enfocada desde un punto de vista conceptual, se trabajan los cuadrados y los cubos, como potencias notables, y, en el caso de los primeros, el paso de un cuadrado a otro mayor, que tan útil les vas a resultar en Secundaria y, sobre todo, tanto va a ayudar a los niños en una mejor comprensión del significado y sentido de las potencias.

Se trabajan las potencias, se estudian también las operaciones de suma y resta de potencias, y otras potencias especiales: las potencias de diez, con o sin decimales. El estudio de las potencias de diez va a permitir introducir la notación científica, lo cual le va a facilitar mucho la abreviación de números muy largos que pueden resultar del cálculo de potencias.

Los últimos contenidos tienen que ver también con las potencias, si bien desde otra perspectiva: se habla de números primos y compuestos, así como números que son múltiplos de otros o, en la situación inversa, divisores.

Sugerencias metodológicas

Las potencias suponen un paso adelante en el proceso de simplificación y abstracción de la multiplicación y producto. Del mismo modo que un producto no es más que la abreviación de una suma con varios sumandos iguales, una potencia es la expresión abreviada de un producto repetido, que se obtiene al multiplicar un número (la base) por el mismo multiplicador varias veces. El número de veces que se multiplica es el exponente.

En esta unidad se tratarán con cierta profundidad los cuadrados y cubos. Los primeros son imprescindibles para entender las unidades de superficie, y los segundos para entender las unidades de volumen. En los cuadrados es importante averiguar cómo se pasa de uno determinado a otros mayores, pues va a proporcionar una buena referencia para el cálculo mental de cualquier cuadrado de un número de dos cifras. El aprendizaje de la suma y la resta de potencias alcanza importancia por contraste con el producto y la división de potencias de la misma base y diferente exponente.

Otro contenido importante, que va a facilitar el cálculo mental, va a suponer la extensión del trabajo con patrones a las potencias, y también va a ser el soporte que va a permitir al alumnado codificar, más adelante, cualquier cantidad en notación científica.

La parte final de la unidad se dedica a los múltiplos de un número, a sus inversos, que son los divisores, y a unos números muy especiales, como son los números primos o aquellos que no se obtienen multiplicando otros números, salvo precisamente ese número. Con los múltiplos y divisores se debe reforzar el aprendizaje de los mismos contraponiéndolos. Si el número 40 es múltiplo del 8 y del 5 (y del 10 y del 4, y del 20 y del 2, etc.), el 8 y el 5 y los demás son divisores del 40.

Resolución de problemas

Dada la importancia de la unidad, los problemas que se trabajan son específicos de los contenidos tratados en la misma. Por ello, tras el estudio de las potencias aparece una página dedicada a la resolución de problemas sobre potencias. En estos primeros compases se pretende que el alumno sepa pasar a la escritura de potencias y a la resolución de las mismas.

Y a los números primos, múltiplos y divisores se dedican también tres páginas, entre ellas la que recoge una situación de aprendizaje centrada en una fábrica de golosinas que empaqueta las mismas siguiendo el modelo de las potencias. Es decir, que a lo largo del tema aparece la resolución de problemas sobre:

- Problemas sobre múltiplos y divisores, en los que se abordan los más importantes de ellos.
- Una Tarea competencial que trabaja las potencias y los múltiplos en el marco de una fábrica de golosinas, que debe envasar a las mismas siguiendo unas ciertas reglas que tienen que ver con las potencias y los múltiplos.

Educación en valores

La palabra «potencia» es asociada por los alumnos y alumnas con la fuerza, aunque no tenga relación con el concepto matemático de cálculo con potencias. Sin embargo, nos permite explorar cómo aquellos con habilidades superiores utilizan ese exceso en relación con los demás.

Algunos estudiantes, ya sea física o intelectualmente dotados, hacen un mal uso de estas características para sentirse superiores y provocar la minusvaloración de sus compañeros. Es importante destacar a aquellos que sobresalen, pero no alardean de sus habilidades, sino que las utilizan para ayudar a otros y fomentar la integración en el grupo.

Debemos prestar atención a situaciones sutiles en las que un estudiante talentoso es rechazado por un grupo, a pesar de no jactarse de sus facultades especiales. Estos alumnos pueden sentirse confundidos y necesitan ayuda para cambiar la situación.

Recursos y materiales recomendados

Para estos contenidos, facilitamos enlaces a tres tipos de recursos: Vídeos tutoriales sobre potencias y raíces ABN, recursos TIC y fichas de trabajo para imprimir.

Recursos para imprimir:

En actiludis.com hay una gran variedad de recursos para trabajar las potencias y raíces desde la metodología ABN. Facilitamos a continuación una selección de ellas:

- Material manipulable de Rosa Piera para el trabajo de cuadrados de semi-decenas y decenas incompletas.
- Marco Tolsby para potencias de Juan Durán Siles.
- Piezas Lego para el trabajo de múltiplos, divisores, números primos y compuestos.

Pensamiento computacional

En esta segunda unidad nos centraremos en el trabajo de las potencias y productos.

- Potencias: cuadrados de números de una cifra y de decenas completas, cubos de números de una cifra, cuadrados de semi-decenas y cuadrados de decenas incompletas.
- Fomentar el uso de las siguientes estrategias: cuadrados de semi-decenas, cuadrados de decenas incompletas.
- Producto:

– Productos de un digito por un bidígito con y sin decimales. Ej. $6 \times 47 - 8 \times 2{,}3 - 9 \times 0{,}54 - \ldots$

- Fomentar el uso de las siguientes estrategias:

  – $3 \times 46 = 3 \times 40 + 3 \times 6 = 120 + 18 = 138$

  – Cuando multiplicamos unidades por décimas o centésimas podemos utilizar la misma estrategia y luego convertir el resultado en unidades haciéndolo 10 o 100 veces más pequeño según corresponda. $3 \times 0{,}46 = 3 \times 46$ c = 138 c = = 1,38 U.

Esquema

Potencias

Operaciones

- Las potencias. Concepto.
- Cuadrados y cubos.
- Paso de cuadrados a otro mayor.
- Operaciones con potencias: suma y resta.
- Potencias de diez con y sin decimales.
- Concepto de múltiplos y divisores.
- Números primos.

Problemas

- Problemas con potencias.
- Problemas de múltiplos y divisores.

Anotaciones

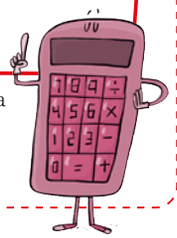
POTENCIAS

Una potencia es una forma abreviada de escribir un producto de factores iguales.

$3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4$ → **Exponente** → Es el número de veces que se repite el factor.

→ **Base** → Es el factor que se repite.

La **potenciación** es el procedimiento por el cual se resuelve una multiplicación en la que todos sus factores son iguales.



Por el tamaño de las operaciones, muchas veces se hace el cálculo con la ayuda de la calculadora. En 4^5, como el exponente es 5, marcamos 5 veces el 4.

4 × 4 × 4 × 4 × 4 = 1024

1 Copia y completa esta tabla en tu cuaderno con ayuda de la calculadora.

	$2^5 = 32$	$3^2 = 9$	…	$6^4 = 1\,296$	…	$10^3 = 1\,000$	$7^3 = 343$
Base	2	…	8	…	5	…	…
Exponente	5	…	3	…	4	…	…
Potencia	32	…	512	…	625	…	…

2 Escribe en tu cuaderno las expresiones que se pueden potenciar y, después, las que no se pueden potenciar, y explica por qué.

a) $4 \times 4 \times 4$ b) $3 \times 3 \times 3 \times 2$ c) $8 + 8$ d) $4 + 4 + 4 + 4$ e) $10 \times 10 \times 10$

Los problemas de potencias son de este tipo:

- ¿Cuántos dedos tienen 10 personas, si cada persona tiene 10 dedos? 10^2

3 Escribe los siguientes problemas en forma de potencia.

a) Veinte cajas de chocolatinas, con veinte bolsas de chocolatinas cada una y con veinte chocolatinas en cada bolsa.

b) Siete contenedores con siete cajones cada uno. Cada cajón tiene siete envases, y cada envase, siete relojes.

Pág. 20 Soluciones

1.

	$2^5 = 32$	$3^2 = 9$	$8^3 = 512$	$6^4 = 1\,296$	$5^4 = 625$	$10^3 = 1\,000$	$7^3 = 343$
Base	2	**3**	8	**6**	5	**10**	**7**
Exponente	5	**2**	3	**4**	4	**3**	**3**
Potencia	32	**9**	512	**1 296**	625	**1 000**	**343**

2. a) 4^3

b) No, porque los factores no son iguales.

c) y d) No, porque se trata de sumas.

d) No, porque los factores no son iguales.

e) 10^3

3. a) 20^3 b) 7^4

Pág. 21 Sugerencias metodológicas

La página se dedica al cálculo de los cuadrados y los cubos, así como su diferenciación con los dobles y los triples. Los niños y las niñas aprenden a calcular los cuadrados y cubos de los diez primeros números y se les propone la resolución de dos ejercicios.

Cuadrados y cubos

Cuadrados

Las potencias de exponente 2 se llaman **cuadrados.** A la potencia también se le llama número cuadrado.

2^2 se lee dos elevado al cuadrado o dos al cuadrado. A su potencia (4) se le llama cuadrado de dos, y es un número cuadrado.

Esta es su representación gráfica:

$\mathbf{2^2} = 2 \times 2 = 4$ cuadrados

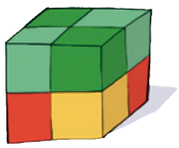
Cubos

Las potencias de exponente 3 se llaman **cubos.**

2^3 se lee dos elevado al cubo o dos al cubo. A su potencia (8) se le llama cubo de dos, y es un número cúbico.

Esta es su representación gráfica:

$\mathbf{2^3} = 2 \times 2 \times 2 = 8$ cubos



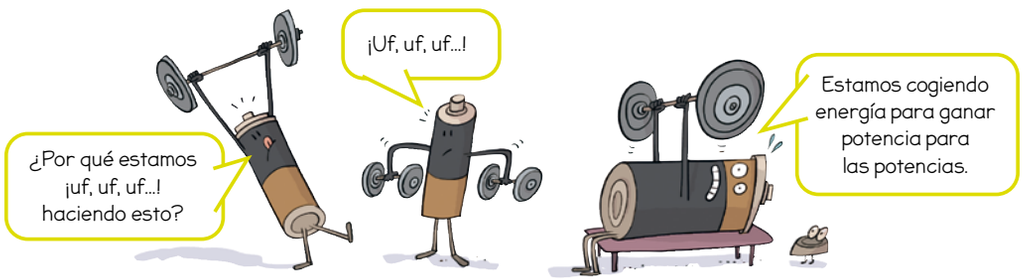
No es lo mismo el doble de un número que su cuadrado. Tampoco lo es el triple de un número y su cubo. Fíjate en los valores del siguiente cuadro:

NÚMERO	DOBLE	CUADRADO	TRIPLE	CUBO
2	2 + 2 = 4	2 × 2 = 4	2 + 2 + 2 = 6	2 × 2 × 2 = 8
3	3 + 3 = 6	3 × 3 = 9	3 + 3 + 3 = 9	3 × 3 × 3 = 27

1 Copia y continúa la tabla anterior de los dobles, cuadrados, triples y cubos, con los números que van desde el 4 hasta el 10. Puedes usar la calculadora.

2 Halla en tu cuaderno el doble, el cuadrado, el triple y el cubo de los siguientes números. Si te hace falta, ayúdate de la calculadora:

a) 20 b) 100 c) 84 d) 65



Anotaciones

Soluciones

1.

NÚMERO	DOBLE	CUADRADO	TRIPLE	CUBO
4	4 + 4 = 8	4 × 4 = 16	4 + 4 + 4 = 12	4 × 4 × 4 = 64
5	5 + 5 = 10	5 × 5 = 25	5 + 5 + 5 = 15	5 × 5 × 5 = 125
6	6 + 6 = 12	6 × 6 = 36	6 + 6 + 6 = 18	6 × 6 × 6 = 216
7	7 + 7 = 14	7 × 7 = 49	7 + 7 + 7 = 21	7 × 7 × 7 = 243
8	8 + 8 = 16	8 × 8 = 64	8 + 8 + 8 = 24	8 × 8 × 8 = 512
9	9 + 9 = 18	9 × 9 = 81	9 + 9 + 9 = 27	9 × 9 × 9 = 729
10	10 + 10 = 20	10 × 10 = 100	10 + 10 + 10 = 30	10 × 10 × 10 = 1000

2. a) 40; 400; 60; 8 000

b) 200; 10 000; 300; 1 000 000

c) 168; 7 056; 252; 592 704

d) 130; 4 225; 195; 274 625

Anotaciones

Pág. 22 Sugerencias metodológicas

Ejercicio 1. Está pensado sobre todo para que los alumnos y las alumnas con dificultades se den cuenta de que lo que define la transformación de una expresión en una potencia no es solo la repetición de sus términos, sino que además es preciso que la operación sea el producto.

Ejercicio 2. También pensando en los escolares con dificultades, el ejercicio permite insistir en las diferencias entre una suma de dos números iguales y un producto con dos números iguales. Que ellos contrasten que lo que pasa con $2 + 2$ y 2×2 no es generalizable ya a partir de $3 + 3$ y 3×3.

Ejercicio 3. Se sugiere que los alumnos y las alumnas asocien los cuadrados a una superficie, a las dos dimensiones, y los cubos, al volumen, a las tres dimensiones. Esto les ayudará mucho, tanto para el estudio de las unidades de superficie y de volumen, como en geometría.

Soluciones

1. b) 23^3
e) 16^3

2. a) $3 + 3 = 2 \times 3$
b) $2 \times 2 \times 2 = 2^3$
c) $3 \times 3 = 3^2$

3. a) 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100
b) 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1 000

4. a) 5^2 b) 12^2 c) 6^2

5.

PRODUCTO	$15 \times 15 \times 15$	9×9	$12 \times 12 \times 12$	$5 \times 5 \times 5$
POTENCIA	15^3	9^2	12^3	5^3
SE LEE	quince al cubo	nueve al cuadrado	doce al cubo	cinco al cubo
SU VALOR ES	3 375	81	1 728	125

6. a) 1^2 b) 2^2 c) 3^2 d) 4^2 e) 5^2 f) 6^2. Son cuadrados.

7. a) 1^3 b) 2^3 c) 3^3

Cuadrados y cubos II

1 Escribe en tu cuaderno las siguientes expresiones que se puedan representar mediante una potencia al cubo.

a) $5 + 5 + 5$ b) $23 \times 23 \times 23$ c) $43 - 43 - 43$ d) 3×3 e) $16 \times 16 \times 16$

2 Une las expresiones que indiquen el mismo resultado.

2^3	2×3	3^2

a) $3 + 3$ b) $2 \times 2 \times 2$ c) 3×3 d) $2 + 2 + 2$

3 Calcula los cuadrados y los cubos de los 10 primeros números naturales.

a) $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9^2, 10^2$ b) $1^3, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3, 6^3, 7^3, 8^3, 9^3, 10^3$

4 Expresa como el cuadrado de un número las siguientes situaciones.

a) El número de cromos de Carlos si compra 5 sobres con 5 cromos cada uno.

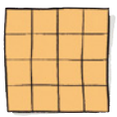
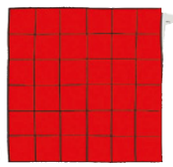
b) El número de flores de Nuria si hace 12 ramos con 12 flores cada uno.

c) El número de trozos de pizza si Rosa corta 6 pizzas en 6 trozos cada una.

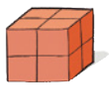
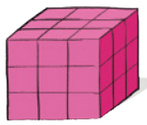
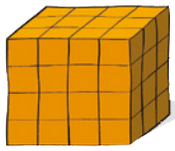
5 Completa esta tabla en tu cuaderno.

PRODUCTO	$15 \times 15 \times 15$	…	…	…
POTENCIA	…	9^2	…	…
SE LEE	…	…	doce al cubo	…
SU VALOR ES	…	…	…	125

6 Expresa estas representaciones como potencias. ¿Qué tipo de potencias son?

a) b) c) d)  e) f) 

7 Y ahora expresa como potencias estas representaciones gráficas.

a) b)  c)  d) 

Pág. 23 Sugerencias metodológicas

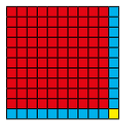
En esta página comienza la explicación del procedimiento de resolución de raíces cuadradas inexactas. Se emplean procesos sucesivos de aproximación, que previamente requieren saber en cuánto se incrementa la superficie de un cuadrado cuando este aumenta la longitud de sus lados en una unidad. Una vez que los escolares saben resolver este extremo, están en condiciones de hallar la raíz cuadrada de cualquier número de hasta cuatro cifras. Veamos el proceso general utilizando un modelo formal distinto del que se emplea en la página. Sea el problema siguiente: «Tenemos 2 854 bombones, que hay que empaquetar en cajas. Han de salir tantas cajas como bombones haya dentro de cada caja. ¿Cuántas cajas harán falta? ¿Cuántos bombones sobrarán?».

Pasar de un cuadrado a otro mayor

Para pasar de un número cuadrado a otro número cuadrado mayor, vamos a hacerlo gráficamente para que se entienda mejor.

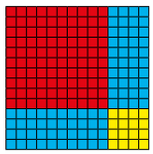
Partiremos de un número cuadrado sencillo, como puede ser 10^2, cuyo valor es $10 \times 10 = 100$ (**en rojo**) y lo vamos a pasar al número cuadrado 11^2.

Si al cuadrado de 10 le añadimos 1 fila y 1 columna más de 10 cuadros cada una (**en azul**) y un cuadrito en la esquina (**en amarillo**), aumentaremos el cuadrado original (**en rojo**) en 21 cuadrados más.



Es decir, $100 + 21 = 121 = 11 \times 11 = 11^2$

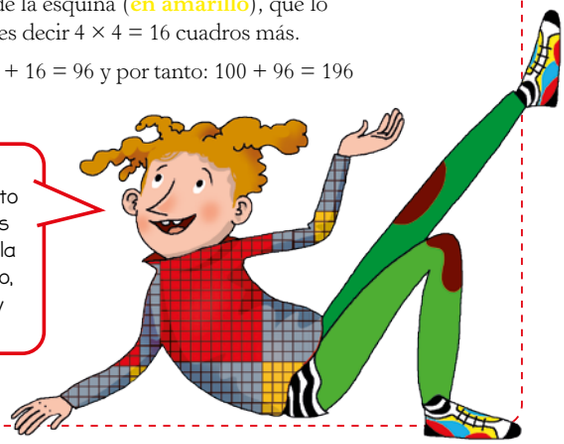
Veamos otro ejemplo, en el que pasaremos de 10^2 a 14^2:



1. Al igual que antes, empezamos con el cuadrado de la decena completa, cuyos lados valen 10 (**en rojo**).
2. Si añadimos 4 filas y 4 columnas de 10 cuadros (**en azul**), hemos añadido $2 \times (4 \times 10) = 80$ cuadros, y el hueco de la esquina (**en amarillo**), que lo completamos con 4 filas de 4 cuadros, es decir $4 \times 4 = 16$ cuadros más.

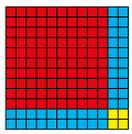
En total hemos añadido $80 + 16 = 96$ y por tanto: $100 + 96 = 196$

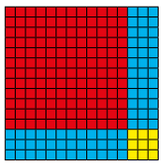
Resumiendo:
Al cuadrado original añádele el producto del número de filas y columnas que has añadido por la cantidad que tienen la fila o columna original (en azul) y, por último, completa con el producto de las filas y columnas añadidas (en amarillo).



1 Construye en tu libreta el paso de los siguientes cuadrados menores a otros mayores. Te dejamos el dibujo de los dos primeros:

a) De 10^2 a 12^2 b) De 12^2 a 15^2 c) De 8^2 a 11^2 d) De 6^2 a 9^2





1.º Descubrimos el intervalo en el que se va a situar la raíz. Va a estar entre 50 ($502 = 2\,500$) y 55 ($552 = 3\,025$). Por consiguiente, se llenan cincuenta cajas con cincuenta bombones; se han gastado 2 500 bombones y quedan 354 bombones por empaquetar.

2.º Ahora viene la cuestión clave. Con 354 bombones, ¿en cuánto se puede incrementar el número de cajas? Lo primero que hay que saber es cuántos bombones se necesitan para pasar de cincuenta cajas a cincuenta y una:

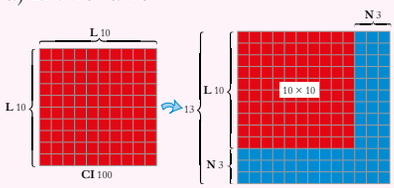
- De entrada, harán falta una caja más y cincuenta bombones. Ya hay 51 cajas con 50 bombones.
- Como debe haber tantos bombones por caja como cajas, tendremos que poner un bombón en cada una de las cajas antiguas para que pasen a tener 51. Como hay cincuenta cajas se necesitan otros cincuenta bombones.
- Y hay que añadir otro bombón a la caja nueva, que pusimos con 50 bombones. Ya tenemos el resultado: necesitamos 101 bombones (que son los cincuenta de la caja nueva, más los cincuenta necesarios para que las cajas anteriores pasen a tener 51, y, por último, el bombón que se añade a la caja nueva).

3.º Si, grosso modo, el aumento de una caja requiere cien bombones, y nos quedan 354 bombones, ¿en cuántas cajas podremos incrementar las ya existentes? No es complicado deducir que tres, y que van a sobrar bombones. Luego el resultado será de 53 cajas y sobran 45 bombones. En efecto: $532 + 45 = 2\,854$.

Soluciones

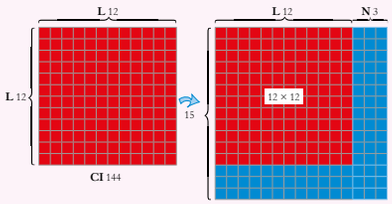
1.

a) De 10^2 a 13^2



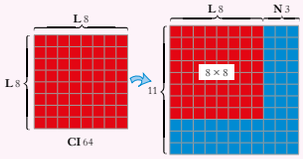
CI N L N^2
$100 + 3 \times 2 \times 10 + 3^2 = 100 + 60 + 9 =$ **169**

b) De 12^2 a 15^2



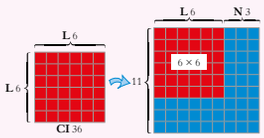
CI N L N^2
$144 + 3 \times 2 \times 12 + 3^2 = 144 + 72 + 9 =$ **225**

c) De 8^2 a 11^2



CI N L N^2
$64 + 3 \times 2 \times 8 + 3^2 = 64 + 48 + 9 =$ **121**

d) De 6^2 a 9^2



CI N L N^2
$36 + 3 \times 2 \times 6 + 3^2 = 36 + 36 + 9 =$ **81**

Pág. 24 Sugerencias metodológicas

Sugerimos al docente que repase con los alumnos el procedimiento rápido para hallar el cuadrado de cualquier número de dos cifras que acabe en 5. Se basa en la aplicación de la propiedad asociativa y remitimos al lector a la página 46 del actual libro de 5.º de Primaria. Este procedimiento permite construir todos los cuadrados de estos números de una manera inmediata y, por tanto, si se tienen los cuadrados de las decenas completas (10, 20, 30, 60, etc.) y de los números terminados en cinco (15, 15, 35, 45, 55, etc.), el paso del cuadrado de un número a otro mayor es sencillo puesto que, como máximo, tendrá que hacerlo para cuatro números.

Por ejemplo, si se pide pasar del cuadrado del 30 al 36, como se conoce el del 35 (1 225), hay que sumarle a este número 35 + 36 (71), y 1 296, que es la suma, es el cuadrado de 36. ¿Y si hay que pasar del cuadrado del 78 al 81? Como se conoce el cuadrado del 80 (6 400) solo hay que sumarle 80 + 81 (161). El cuadrado será 6 561.

Se recomienda también que los alumnos tengan presente que, al pasar de un cuadrado al otro mayor, no olviden el cuadrado pequeño final, el de la esquina.

Ejercicio 1. Es un ejercicio simple de aplicación del procedimiento.

Ejercicio 2. Es también un ejercicio sencillo, pues se trata de averiguar el número más cercano acabado en 0 o en 5 respecto al que se indica.

Ejercicio 3. Para simplificar, se les puede decir a los niños que basta con que doblen el lado del cuadrado cada vez que aumenten en uno el número del cuadrado. Tras ello, añaden el cuadrado de la esquina. Por ejemplo, para pasar de 40^2 a 44^2:

1.º Hallamos el cuadrado de 40, que es 1 600.

2.º Se multiplica el doble de 40, que es 80, por 4. Son 320. Se suman a los 1 600, y son 1920.

3.º Se añade la superficie del cuadrado ($4 \times 4 = 16$), y se suma: 1 936. Ese es el cuadrado de 44.

Pasar de un cuadrado a otro mayor II

¿Cuántas filas y columnas pueden añadirse para pasar de un cuadrado a otro mayor?

La respuesta es: solo cuatro filas y cuatro columnas. En la unidad 3 del curso pasado vimos que el producto del cuadrado de un número de dos cifras que acabe en 5 (semidecena) se calculaba así:

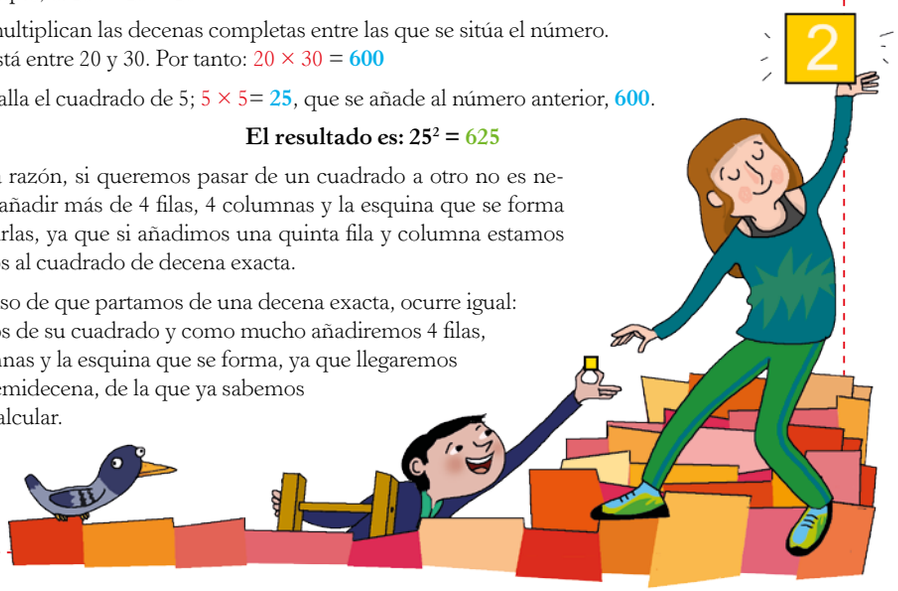
Por ejemplo, el $25^2 = 25 \times 25$

1. Se multiplican las decenas completas entre las que se sitúa el número. 25 está entre 20 y 30. Por tanto: $20 \times 30 = 600$
2. Se halla el cuadrado de 5; $5 \times 5 = 25$, que se añade al número anterior, 600.

El resultado es: $25^2 = 625$

Por esta razón, si queremos pasar de un cuadrado a otro no es necesario añadir más de 4 filas, 4 columnas y la esquina que se forma al añadirlas, ya que si añadimos una quinta fila y columna estamos llegamos al cuadrado de decena exacta.

En el caso de que partamos de una decena exacta, ocurre igual: partimos de su cuadrado y como mucho añadiremos 4 filas, 4 columnas y la esquina que se forma, ya que llegaremos a una semidecena, de la que ya sabemos cómo calcular.



1. Calcula aplicando el cuadrado de las semidecenas.

   a) 35^2 b) 55^2 c) 75^2 d) 95^2

2. Indica a partir de qué semidecena se calcularía el cuadrado de estas cantidades.

   a) 23^2 b) 48^2 c) 64^2 d) 87^2

3. Indica las filas, las columnas y el cuadrado de la esquina que se forma para calcular el cuadrado del ejercicio anterior. Te dejamos el primero resuelto.

   a) 23^2: añadimos 3 filas y 3 columnas de 20 cuadros cada una, más la esquina de 3×3.

   b) 48^2 c) 64^2 d) 87^2

4. Calcula, sin dibujar el gráfico, el cuadrado de estas cantidades.

   a) 15^2 b) 16^2 c) 41^2 d) 46^2

24

Soluciones

1. a) 1 225 b) 3 025 c) 5 625 d) 9 025

2. a) A partir de 20^2.
b) A partir de 45^2.
c) A partir de 60^2.
d) A partir de 85^2.

3. b) Añadimos 3 filas y 3 columnas de 40 cuadros cada una, más la esquina de 3×3.
c) Añadimos 4 filas y 4 columnas de 60 cuadros cada una, más la esquina de 4×4.
d) Añadimos 2 filas y 2 columnas de 80 cuadros cada una, más la esquina de 2×2.

4. a) 225 b) 256 c) 1 681 d) 2 116

Potencias de 10

Las potencias más fáciles de hallar son las que tienen base 10. Nos permiten escribir números muy grandes de forma abreviada. Recuerda cómo se resuelven observando los ejemplos.

$10^2 = 100$ $10^5 = 100\,000$ $10^4 = 10\,000$

100 000 000 000 (cien mil millones) $= 10^{11}$

Observa qué útiles son las potencias de 10. Vamos a ver cómo usarlas con varios ejemplos resumidos en el siguiente cuadro.

NÚMERO	PROCEDIMIENTO	POTENCIA DE 10
328 000 000	$328 \times 1\,000\,000$	328×10^6
482 456 781	Redondeamos a 500 000 000	5×10^8
482 456 781	Redondeamos a 480 000 000	48×10^7

Y a la inversa:

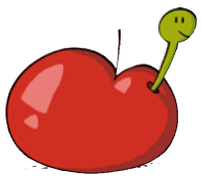
POTENCIA DE 10	PROCEDIMIENTO	NÚMERO
$2{,}46 \times 10^6$	246×10^4	2 460 000
$67{,}8 \times 10^6$	678×10^5	67 800 000
$0{,}08 \times 10^6$	8×10^4	80 000

1 Escribe en forma de potencia de 10 las siguientes cantidades.

a) El cometa Refulgente está a 10 000 000 km de la Tierra.

b) En esa piscina hay 1 000 000 000 (mil millones) de gotas de agua.

c) Ese gusano tiene 1 000 000 de células.



2 Redondea al orden de magnitud mayor y convierte en potencias de 10 las siguientes cantidades.

a) 723 567 000 b) 280 000 c) 320 000 d) 78 100 000

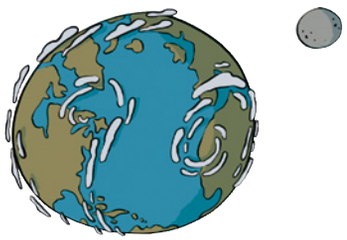
3 Redondea al orden de magnitud mayor y convierte en potencias de 10 estos datos sobre la Tierra.

a) La Tierra se formó hace 4 550 000 000 años.

b) La circunferencia en el ecuador es de 40 091 000 m.

c) La distancia a la Luna es de 384 000 km.

d) La distancia al Sol es de 149 600 000 km.



Anotaciones

Pág. 25 Sugerencias metodológicas

La página se dedica al desarrollo de las potencias de base 10. Se desdobla en dos contenidos.

Por un lado, la técnica de obtención: el exponente indica el número de ceros que debe tener la potencia final; y la de, conociendo la potencia, saber hallar la base y el exponente que la ha originado: 100 000 es igual a 105. Por otro lado, se aborda cómo facilitar el cálculo de potencias muy elevadas redondeando la cantidad al orden de magnitud que se considere necesario.

Esta técnica es muy importante, permite trabajar con números muy grandes, y, a la vez, es sencilla de aprender y practicar.

En 6.º se retomará y se trabajará ya como lo que es, la notación científica.

El redondeo al orden de magnitud mayor se debe hacer, en este ámbito, teniendo en cuenta el orden de magnitud siguiente.

Soluciones

1. a) 10^7 b) 10^9 c) 10^6

2. a) 7×10^8 b) 3×10^5 c) 3×10^5 d) 8×10^7

3. a) $5\,000\,000\,000 \rightarrow 5 \times 10^9$ b) $40\,000\,000 \rightarrow 4 \times 10^7$

c) $400\,000 \rightarrow 4 \times 10^5$ d) $150\,000\,000 \rightarrow 15 \times 10^7$

Anotaciones

Potencias de 10 con decimales

Sin modificar su valor, un número podemos expresarlo de diferentes formas con las potencias de 10.

A Aplicando un creciente en la potencia de 10.

$132\,000 = 13\,200 \times 10 = 1\,320 \times 10^2 = 132 \times 10^3 = 13{,}2 \times 10^4 = 1{,}32 \times 10^5 = 0{,}132 \times 10^6$

B Haciendo que disminuya el exponente de la potencia de 10.

$0{,}052 \times 10^6 = 0{,}52 \times 10^5 = 5{,}2 \times 10^4 = 52 \times 10^3 = 52\,000$

1 Transforma las siguientes cantidades como te mostramos en el ejemplo. En el resultado tiene que haber una parte decimal.

a) $654{,}2 = 6{,}542 \times 10^2$ c) 754,6 e) 31,8 g) 2 456

b) 15 d) 637 f) 2 838,1 h) 75,57

2 Observa el ejemplo y completa la tabla en tu cuaderno.

	245,789	38,2	0,004	120,05
$\times 10^1$	2 457,89	…	…	…
$\times 10^2$	24 578,9	…	…	…
$\times 10^3$	245 789	…	…	…
$\times 10^4$	2 457 890	…	…	…

3 Indica el exponente de la potencia para que la igualdad se cumpla.

a) $47{,}89 \times 10^4 = 4{,}789 \times 10^5 = 478{,}9 \times 10^? = 0{,}4789 \times 10^? = 4\,789 \times 10^?$

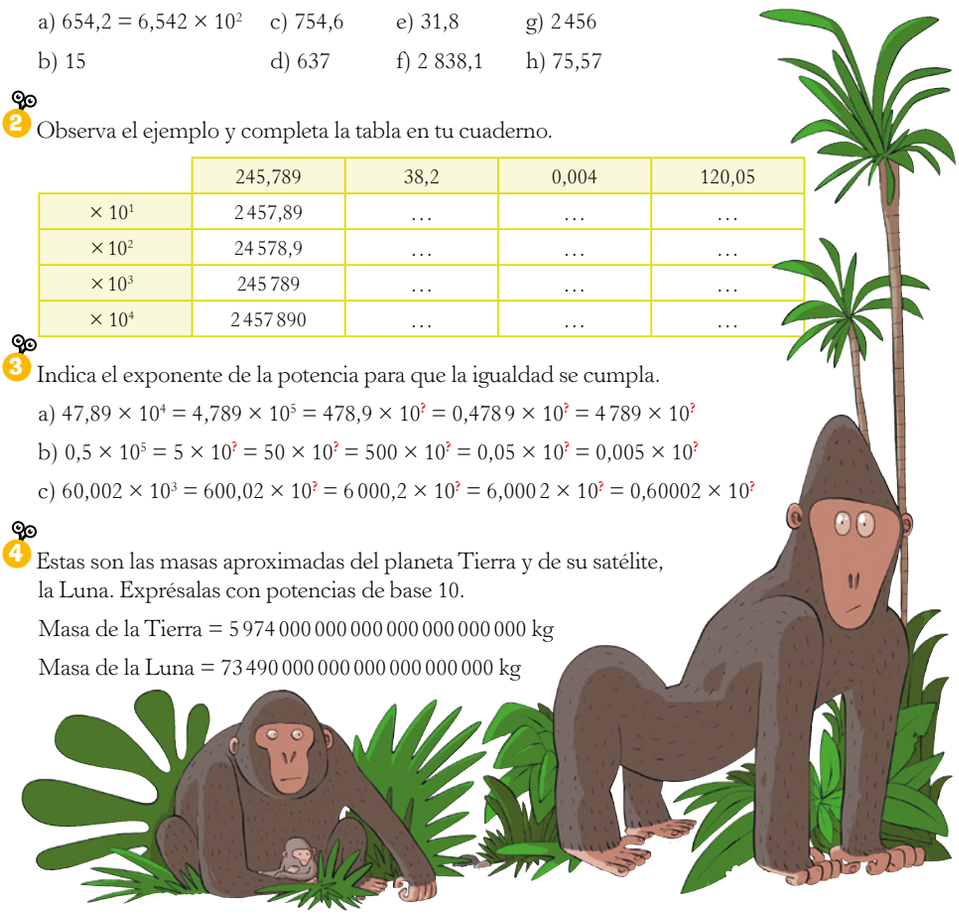
b) $0{,}5 \times 10^5 = 5 \times 10^? = 50 \times 10^? = 500 \times 10^? = 0{,}05 \times 10^? = 0{,}005 \times 10^?$

c) $60{,}002 \times 10^3 = 600{,}02 \times 10^? = 6\,000{,}2 \times 10^? = 6{,}000\,2 \times 10^? = 0{,}60002 \times 10^?$

4 Estas son las masas aproximadas del planeta Tierra y de su satélite, la Luna. Exprésalas con potencias de base 10.

Masa de la Tierra = 5 974 000 000 000 000 000 000 000 kg

Masa de la Luna = 73 490 000 000 000 000 000 000 kg



Pág. 26 Sugerencias metodológicas

La página realiza un entrenamiento exhaustivo con las potencias de diez. Con ello facilita los automatismos en la expresión de potencias elevadas en forma de notación científica, además de abrir un campo nuevo para los procesos de composición y descomposición.

Los dos procedimientos que se indican al comienzo de la página son muy intuitivos, y se relacionan con suma facilidad con la práctica de patrones que los niños y las niñas han desarrollado en cursos anteriores.

Soluciones

1. Respuesta libre. Por ejemplo:

b) $0{,}15 \cdot 10^2$ d) $6{,}37 \cdot 10^2$ f) $28{,}381 \cdot 10^2$

c) $7{,}546 \cdot 10^2$ e) $0{,}318 \cdot 10^2$ g) $2{,}456 \cdot 10^3$ h) $7{,}557 \cdot 10^1$

2.

	245,789	**38,2**	**0,004**	**120,05**
$\times 10^1$	2 457,89	**382**	**0,04**	**1 200,5**
$\times 10^2$	24 578,9	**3 820**	**0,4**	**12 005**
$\times 10^3$	245 789	**38 200**	**4**	**120 050**
$\times 10^4$	2 457 890	**382 000**	**40**	**1 200 500**

3. a) $10^3 - 10^6 - 10^2$

b) $10^4 - 10^3 - 10^2 - 10^6 - 10^7$

c) $10^2 - 10^1 - 104 - 10^5$

4. Tierra = $5\,974 \cdot 10^{21}$

Luna = $7\,349 \cdot 10^{19}$

Suma y resta de potencias

La potenciación no es más que una forma abreviada de expresar una multiplicación, y al multiplicar potencias lo que se hace es multiplicar productos.

Cuando se combina la potenciación con la suma o la resta, se están realizando operaciones diferentes. Observa la siguiente suma de potencias:

$$2^4 + 2^3 = (2 \times 2 \times 2 \times 2) + (2 \times 2 \times 2) = 16 + 8 = 24$$
$$2^{4+3} = 2^7 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 128$$

Como has podido comprobar, la suma de dos potencias de la misma base **no es igual** a otra potencia cuyos exponentes se suman. De la misma forma ocurre con la resta. Observa:

$$2^4 - 2^3 = (2 \times 2 \times 2 \times 2) - (2 \times 2 \times 2) = 16 - 8 = 8$$
$$2^{4-3} = 2^1 = 2$$

Para resolver una suma o una resta de potencias, se calcula primero cada una de las potencias; luego sumamos o restamos los resultados, según el caso, y una vez obtenido el resultado, se puede expresar si es posible en forma de potencia de base 10.

1 Calcula las siguientes sumas de potencias.

a) $3^2 + 3^3$ c) $6^2 + 4^2$ e) $10^4 + 10^2$ g) $10^2 + 5^2$

b) $10^2 + 10^2$ d) $10^4 + 10^{10}$ f) $5^2 + 5^4$ h) $2^4 + 3^4$

2 Calcula las siguientes restas de potencias.

a) $3^4 - 3^2$ c) $5^4 - 5^2$ e) $6^3 - 4^2$ g) $3^4 - 2^4$

b) $10^6 - 10^4$ d) $10^4 - 10^3$ f) $10^2 - 5^2$ h) $10^4 - 1^{10}$

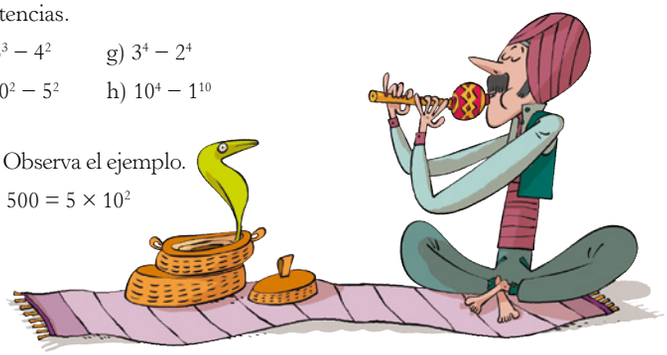
3 Calcula las siguientes operaciones. Observa el ejemplo.

a) $2 \times 10^2 + 3 \times 10^2 = 200 + 300 = 500 = 5 \times 10^2$

b) $5 \times 10^4 + 2 \times 10^4$

c) $12 \times 10^3 + 10^3$

d) $8 \times 10^5 + 3 \times 10^4$



Anotaciones

Pág. 27 Sugerencias metodológicas

En lo que se refiere a la suma y resta de potencias, el acento hay que ponerlo en que la realización de estas operaciones exige que previamente se hallen las correspondientes potencias de los sumandos o del minuendo y sustraendo, según se trate de una suma o de una resta, y posteriormente se halle la suma o la diferencia. No hay vías de acortamiento ni atajos. Los ejemplos que se recogen en la cabecera de la página son bastante ilustrativos al respecto.

En cuanto a la resolución de los ejercicios, los escolares con menor capacidad de cálculo pueden utilizar la calculadora en los casos en que no se trate de potencias de diez.

Soluciones

1. a) $6 + 27 = 33$
b) $36 + 16 = 52$
c) $1\,000 + 100 = 1\,100$
d) $100 + 25 = 125$
e) $100 + 100 = 200$
f) $10\,000 + 10\,000\,000\,000 = 10\,000\,010\,000$
g) $25 + 625 = 650$ h) $16 + 81 = 97$

2. a) $81 - 9 = 72$
b) $1\,000\,000 - 10\,000 = 990\,000$
c) $625 - 25 = 600$
d) $10\,000 - 1\,000 = 9\,000$
e) $216 - 16 = 200$
f) $100 - 25 = 75$
g) $81 - 16 = 65$
h) $10\,000 - 1 = 9\,999$

3. b) $50\,000 + 20\,000 = 70\,000 = 7 \cdot 10^4$
c) $12\,000 + 1\,000 = 13\,000 = 13 \cdot 10^3$
d) $800\,000 + 30\,000 = 830\,000 = 83 \cdot 10^4$

Anotaciones

RESUELVO PROBLEMAS

Problemas con potencias

Siempre que puedas, expresa en forma de potencia y resuelve.

Resuelvo problemas

1. Antonio, Silvia y Edu saben una curiosidad sobre la película de *La guerra de las galaxias*. Durante el recreo, cada uno de ellos se la cuenta a otros tres. Por la tarde, en el polideportivo, a su vez estos se la cuentan a otros tres cada uno. ¿Cuántos saben ya dicha curiosidad? ¿Y si se la vuelven a contar a otros tres cada uno?

2. Un *dewback* es una criatura de cuatro patas que transporta soldados estelares. ¿Cuántas patas de *dewback* habrá en cuatro naves si en cada una de ellas hay cuatro *dewbacks*?

3. Claudia quiere pegar sus pegatinas de los personajes de *La guerra de las galaxias* en hileras formando un cuadrado. Si ha pegado 64, ¿cuántas filas de pegatinas ha pegado?

4. ¿Podrá Claudia colocar 54 pegatinas formando un cuadrado? Si no puede, ¿con cuántas sí podría hacerlo y cuántas le sobrarían?

5. Un paquete contiene 12 cajas; cada caja tiene 12 estuches de Darth Vader, y cada estuche, 12 rotuladores. ¿Cuántos rotuladores hay en un paquete? ¿Y en 12 paquetes?

6. Se quiere colocar 25 filas con 25 sillas en cada fila para ver la serie del pequeño Yoda. ¿Cuántas sillas se necesitan? ¿Y si fueran 28 filas con 28 sillas cada una?

Invento, creo y razono

7. La Tierra, en su viaje alrededor del Sol, se desplaza a 108 000 km/h. Utilizando la calculadora, averiguad cuántos kilómetros recorre en un día, en una semana y en quince días. Expresad los resultados en potencias de base 10.

28

Pág. 28 Sugerencias metodológicas

Se plantean siete problemas. Los problemas que se solucionan con una potencia simple son los números 1, 2, 6 y 7. El problema 5 requiere de dos potencias. El problema 3 se puede resolver buscando el cuadrado de 8 que da 64. Y en el problema 4 se ha de buscar el número cuadrado de plantas que más se aproxima a 54.

Para el ejercicio 7, se les recomienda que aproximen el resultado final a 39 000 000, y que sea este el número que se exprese en potencia decimal.

Soluciones

1. Saben el secreto 27 personas. Por la tarde, lo sabrán 81.

2. Habrá 64 patas.

3. Ha pegado 8 filas de pegatinas.

4. Podría hacerlo con 49 pegatinas y le sobrarían 5.

5. En un paquete hay 1 728 rotuladores. En 12 paquetes, 20 736.

6. Se necesitan 625 sillas. 784 sillas.

7. Investiga en equipo.

También puede aproximarse el último resultado a 39 000 000 y expresarlo en potencia decimal. En un día recorre 2 592 000 km. En una semana recorre 18 144 000 km. En quince días recorre 38 880 000 ($39 \cdot 10^6$) km.

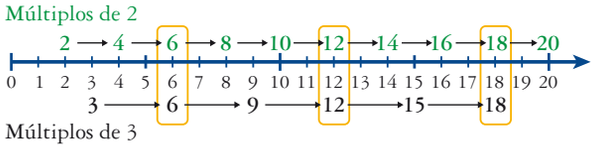
Los múltiplos de un número

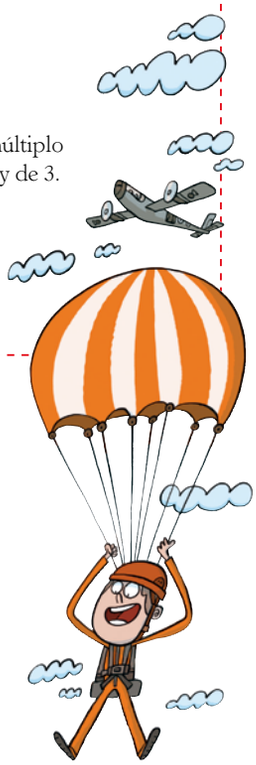
Cuando multiplicamos dos números, el resultado es un múltiplo de los dos números que hemos multiplicado.

$4 \times 2 = \mathbf{8}$. El **8** es múltiplo de 4 y de 2.

$4 \times 1 = \mathbf{4}$. El **4** es múltiplo de 4 y de 1.

Cuando un número es múltiplo a la vez de dos o más números, es un múltiplo común de todos ellos. Por ejemplo, 6, 12 y 18 son múltiplos comunes de 2 y de 3.





1. Escribe cuatro múltiplos de cada uno de estos números: 3, 6, 8 y 11.

2. ¿De qué números es múltiplo el 0? ¿Por qué?

3. Halla los múltiplos comunes de 4 y de 6 que sean menores de 50.

4. Los números 20, 40, 60, 80 y 100 son múltiplos comunes de 4 y de 5. Responde a las siguientes preguntas:

   a) Si sumas dos múltiplos comunes cualesquiera, ¿el número obtenido es también un múltiplo común de 4 y de 5?

   b) Si de un múltiplo común restas otro múltiplo común menor, ¿el número obtenido es también un múltiplo común de 4 y de 5?

5. Halla los múltiplos comunes, menores de 100, del 4 y del 6, y comprueba si ocurre con ellos lo mismo que sucedía en el problema anterior.

6. Sabiendo los múltiplos comunes, escribe en tu cuaderno de qué números se trata.

NÚMEROS	MÚLTIPLOS COMUNES
…	21 y 42
…	18 y 27
…	20, 30 y 40
…	12, 16 y 24
…	12 y 18

Anotaciones

Pág. 29 Sugerencias metodológicas

Los contenidos de la página son sencillos, pero el docente ha de asegurarse de que son bien asimilados por la trascendencia que tendrán en posteriores aprendizajes. Los puntos a fijar son:

1. Qué es un múltiplo, y los casos de los múltiplos especiales del 0 y del 1.
2. Qué son múltiplos comunes.
3. Qué son números primos y números no primos o compuestos.

Soluciones

1. Respuesta libre.

2. De todos los números, porque su producto siempre es cero.

3. 12, 24, 36 y 48.

4. a) Sí, porque todas sus sumas son múltiplos de ambos números.

b) Sí, porque la diferencia entre ambos es múltiplo de ambos números.

5. 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84 y 96. En efecto, ocurre lo mismo con ellos.

6.

NÚMEROS	MÚLTIPLOS COMUNES
3 y 7	21 y 42
3 y 9	18 y 27
2 y 5	10, 20, 30 y 40
2 y 4	12, 16 y 24
2, 3 y 6	12 y 18

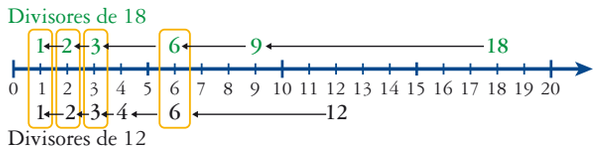
Anotaciones

Los divisores de un número

Un divisor de un número es otro número que, si divides el primero por el segundo, no se obtiene resto.

El 4 es divisor de 16, porque 16 : 4 = 4, y el resto es 0.

Cuando un número es divisor a la vez de dos o más números, es un divisor común de todos ellos. Por ejemplo, 1, 2, 3 y 6 son divisores comunes de 12 y de 18.



1. Se puede considerar que el cero es múltiplo de todos los números. ¿Qué número es divisor de todos los números?

2. Escribe:

   a) Cuatro divisores de 12.

   b) Dos divisores de 15.

   c) Dos divisores de 10.

   d) Tres divisores de 20.

3. Halla los divisores comunes de 12 y de 8.

4. Copia y completa en tu cuaderno las siguientes tablas.

N.º	DIVISORES
6	1, 2, 3 y 6
12	1, 2, 3, 6 y 12
24	1, 2, 3, 6, 12 y 24
48	…
96	…
192	…

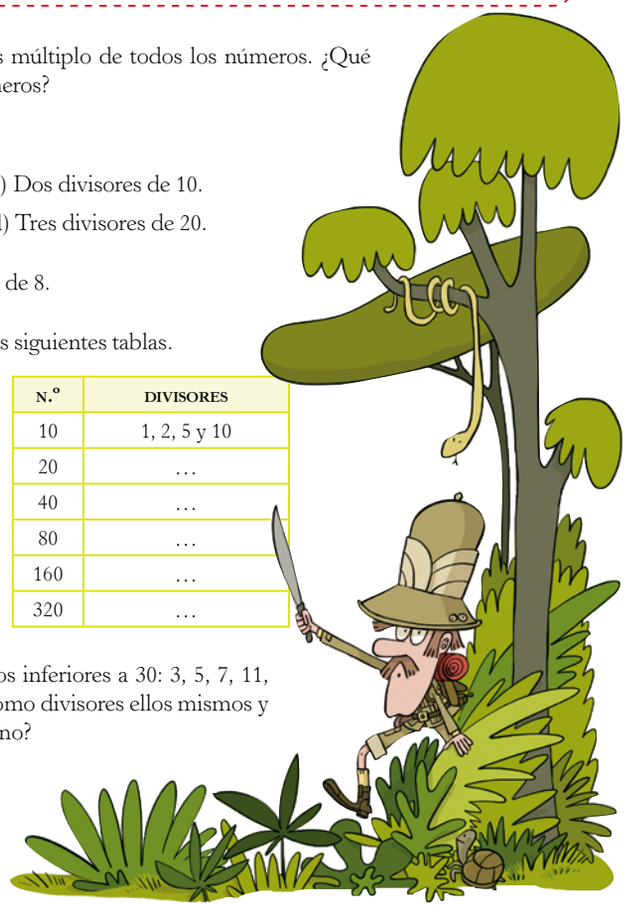
N.º	DIVISORES
10	1, 2, 5 y 10
20	…
40	…
80	…
160	…
320	…

5. Los que siguen son números primos inferiores a 30: 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29. Si no contamos como divisores ellos mismos y el 1, ¿cuántos divisores tiene cada uno?

6. Fíjate: $4 \times 3 = 12$, y $4^3 = 64$

   a) ¿Son 4 y 3 divisores de 12?

   b) ¿Es 4 divisor de 64? ¿Y 3?



Pág. 30 Sugerencias metodológicas

Los contenidos de la presente página también son sencillos, pero aquí hay que asegurar una buena asimilación de los mismos. Los puntos más importantes a fijar son:

1. Qué es un divisor, y los casos especiales del 0 y del 1 (como divisor común).
2. Qué son divisores comunes.
3. La divisibilidad de los números primos, que solo pueden dividirse por sí mismos o por uno.

Soluciones

1. El 1 es divisor de todos los números.

2. a) 1, 2, 3, 4, 6 o 12 c) 1, 2, 5 o 10

b) 1, 3, 5, o 15 d) 1, 2, 4, 5, 10 o 20

3. 1, 2 y 4.

4.

N.º	DIVISORES
6	1, 2, 3 y 6
12	1, 2, 3, 6 y 12
24	1, 2, 3, 6, 12 y 24
48	**1, 2, 3, 6, 12, 24 y 48**
96	**1, 2, 3, 6, 12, 24, 48 y 96**
192	**1, 2, 3, 6, 12, 24, 48, 96 y 192**

N.º	DIVISORES
10	1, 2, 5 y 10
20	**1, 2, 5, 10 y 20**
40	**1, 2, 5, 10, 20 y 40**
80	**1, 2, 5, 10, 20, 40 y 80**
160	**1, 2, 5, 10, 20, 40, 80 y 160**
320	**1, 2, 5, 10, 20, 40, 80, 160 y 220**

5. Ninguno.

6. a) Sí. b) Sí. No.

Números primos

Un número primo es aquel que solo tiene dos divisores: él mismo y la unidad.

El 2 es primo porque solo se puede dividir por 2 y por 1.

El 4 no es primo porque se puede dividir por 4, 2 y 1.

Entre los 20 primeros números están los primos 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 y 19.

Los números primos y los múltiplos:

Cualquier número que no sea primo lo podemos formar a partir del producto de varios números primos. Por ejemplo, el 24.

$2 \times 12 = 24$, donde 2 es número primo, y $2 \times 6 = 12$, donde 2 es número primo, y $2 \times 3 = 6$, donde 2 y 3 también son primos.

Los números primos y los divisores de un número:

Todos aquellos números que no son primos se pueden dividir por números primos, por sí mismos y por 1. Podemos, por tanto, descomponer dicho número en el producto de varios números primos.

Por ejemplo, el 27: lo dividen el 1, el 3, el 9 y el 27. El 1 y el 3 son primos y el 9, a su vez, se divide por 3, que también es primo.

1 Indica entre los siguientes números cuáles son primos y cuáles no.

a) 9 b) 12 c) 23 d) 34

2 Averigua qué números son múltiplos del 3. ¿Qué relación hay entre ellos?

3 Averigua qué números primos dividen a estos números.

a) 16 b) 22 c) 9 d) 21

Anotaciones

Pág. 31 Sugerencias metodológicas

Los números primos se pueden presentar como unos números raros, estrambóticos. Son números que solo se pueden dividir, sin que haya resto, por sí mismos… y por el número uno, claro. Eso quiere decir que no son producto de ninguna multiplicación, salvo que sea ese mismo número el multiplicando y el uno el multiplicador. El docente puede jugar con los alumnos a que digan números al azar, y busquen cuáles de ellos han «salido» del producto de dos números inferiores y cuál o cuáles no.

Derivando el ejercicio anterior, el docente puede preguntar si algunos de los factores de los productos que han descubierto sus alumnos son o no primos, y si no lo son, qué multiplicación hay detrás. Por ejemplo, un niño ha dicho que el 21 no es primo, pues resulta de multiplicar 7 por 3. ¿Y el siete? ¿Es primo? ¿Y el 3? O, por ejemplo, una niña ha visto que el 30 no es primo, puesto que se multiplica 6×5. ¿Y el 6? ¿Es primo? Etc.

Soluciones

1. a) 9 no es primo. c) 23 es primo.
b) 12 no es primo. d) 34 no es primo.

2. La suma de sus cifras es siempre múltiplo de 3.

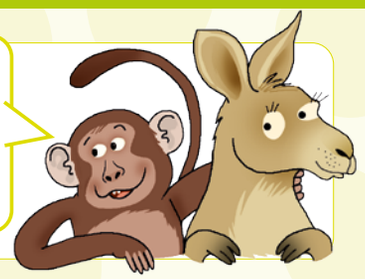
3. a) El 2. b) El 2 y el 11. c) El 3. d) El 3 y el 7.

Anotaciones

RESUELVO PROBLEMAS

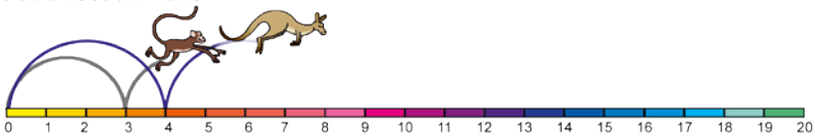
Problemas de múltiplos

Los múltiplos son útiles:
- Para saber cuándo coinciden dos o más sucesos.
- Para saber la cantidad exacta a envasar sabiendo la capacidad de envases distintos.
- Para saber la cantidad exacta de personas que hay en varios grupos, sabiendo las personas que forman cada grupo.



Sigo los pasos y resuelvo el problema

1 Sobre una recta numérica de 20 números están saltando un mono y un canguro. El mono da saltos de 3 en 3 números, y el canguro, de 4 en 4. ¿En qué números coinciden los saltos de ambos animales?



1 Como se busca la coincidencia de un suceso, será necesario sacar los múltiplos del 3 y del 4 hasta el 20.

M (3) = 3, 6, … M (4) = 4, 8, …

2 Establece en qué números coinciden.

Resuelvo problemas

2 Resuelve el problema anterior empleando dos nuevos supuestos:

a) El mono salta de 2 en 2 y el canguro, de 3 en 3.

b) El mono salta de 2 en 2 y el canguro, de 5 en 5.

3 Jaime está un poco constipado y su madre le ha llevado al médico. El doctor le ha recetado dos medicamentos: uno lo tiene que tomar cada 4 horas y el otro, cada 6. ¿Cada cuántas horas coincidirán las dos tomas? ¿Cuántas veces al día sucederá esto?

4 Mario tiene un número de cromos repetidos mayor que 80 y menor que 90. Si los agrupa de 2 en 2 no le sobra ninguno, y si los agrupa de 3 en 3 tampoco. ¿Cuántos cromos tiene Mario?

Invento, creo y razono

5 Un cocinero matemático sacó del horno una bandeja de números del 1 al 100. De forma accidental, se le cayeron al suelo los números que eran múltiplos del 15 y que la suma de sus cifras era múltiplo de 9. ¿Cuántos números se le cayeron al suelo? ¿Cuáles?

Pág. 32 Sugerencias metodológicas

Se pretende en esta página que el alumnado conozca la utilidad de los múltiplos para resolver determinadas situaciones problemáticas. En el encabezado se explican algunos usos. Es importante que el docente incida en ello y ejemplifique con situaciones concretas.

Este tipo de problemas no se centra en el uso de las operaciones aritméticas. Por ello, debe modelizarse el proceso de resolución de estos, marcando bien los pasos a seguir (como se muestra en el primer apartado de la página) e incidiendo en la correcta redacción de las soluciones.

El ejercicio 2 es una continuación del problema 1 con dos nuevos supuestos. El 3 busca la coincidencia de un hecho, pero a partir de dicha coincidencia se hacen más preguntas. El ejercicio 4 busca conocer la cantidad exacta de cromos dado un intervalo concreto y dos posibles agrupamientos (múltiplos).

Se cierra la página con el apartado Invento, creo y razono. Se propone en este caso una situación problemática en la que se buscan los números del 1 al 100 que sean múltiplos del 15 y del 9 a la vez. Se propone que el alumnado saque primero los múltiplos del quince y posteriormente sume sus cifras para comprobar cuáles son también múltiplos del 9.

Soluciones

1. Los dos animales coinciden en el 12.

2. a) Coinciden en el 6, en el 12 y en el 18.
b) Coinciden en el 10 y en el 20.

3. Coinciden cada 12 horas, dos veces al día.

4. Tiene 84 cromos.

5. Se le cayeron al suelo dos números, el 45 y el 90.

Problemas de divisores

Los divisores son útiles:
- Para saber de cuántas formas se puede repartir cualquier cosa sin que sobre nada.
- Para saber de cuántas formas distintas puedes cortar un material sin que sobre nada.
- Para saber, a partir de dos o más cantidades de algo, cuál es el máximo de cada una que puedes coger para repartir, sin que sobre nada.

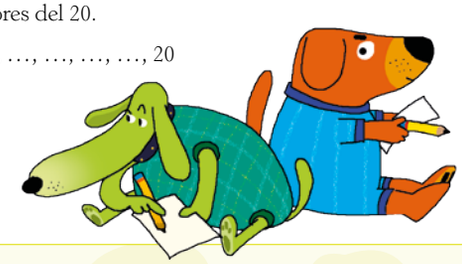
Sigo los pasos y resuelvo el problema

1 Carla quiere empaquetar 20 pegatinas en bolsas con el mismo número de pegatinas cada una, sin que sobre ninguna. Indica de cuántas formas distintas lo podrá hacer.

1. Se buscan todas las formas posibles de repartir algo, por tanto, es un problema de divisores. Habrá que sacar todos los divisores del 20.

   D (20) = 1, …, …, …, …, 20

2. Redacta todas las posibilidades:
   - Un paquete de 20 pegatinas.
   - 20 paquetes de una pegatina.
   - …



Resuelvo problemas

2 La monitora de nuestro campamento quiere hacer equipos con sus 15 campistas. Quiere que los equipos tengan más de 2 componentes, pero menos de 10, y que no sobre ninguno. Indica de cuántas maneras podrá hacerlo.

3 ¿De cuántas maneras distintas podremos cortar un listón de madera de 18 dm sin que sobre nada? ¿Qué medida podrá tener cada trozo?

4 José Miguel quiere guardar sus 30 figuras de acción de cuando era pequeño. Para ello quiere utilizar cajas donde quepan más de 3 figuras, pero menos de 10. ¿De cuántas formas podrá guardarlas?

Invento, creo y razono

5 Inventa un problema en el que sea necesario el uso de los divisores a partir de los siguientes datos y resuélvelo.

Empaquetar
cajas
45 bombones

Anotaciones

Pág. 33 Sugerencias metodológicas

En esta página se le quiere mostrar al alumnado la utilidad que pueden tener los divisores de un número. En el encabezado se explican algunos usos. Es importante que el docente incida en ello y ejemplifique con situaciones concretas.

Ya se ha mencionado anteriormente que este tipo de problemas no se centra en el uso de las operaciones aritméticas. Por ello, debe modelizarse el proceso de resolución de estos, marcando bien los pasos a seguir (como se muestra en el primer apartado de la página) e incidiendo en la correcta redacción de las soluciones puesto que en ocasiones son muchas las posibilidades de empaquetar algo y hay que especificarlas todas.

Los ejercicios 1, 2, 3 y 4 recogen situaciones claras donde el uso de los divisores nos sirve para resolver el problema planteado. Finalmente se cierra la página proponiendo una tarea de invención de un problema de divisores a partir de las palabras propuestas.

Soluciones

1. D (20) = 1, 2, 4, 5, 10, 20

Un paquete de 20 pegatinas. 20 paquetes de una pegatina. 2 paquetes de 10. 10 paquetes de 2. 4 paquetes de 5. 5 paquetes de 4.

2. D (15) = 1, 3, 5, 15

Tres grupos de 5 o 5 grupos de 3.

3. D (18) = 1, 2, 3, 6, 9, 18

Se puede cortar de 5 formas diferentes, ya que un trozo de 18 dm implicaría no cortarlo. Los trozos tendrían 1, 2, 3, 6, 9 dm cada uno dependiendo del corte que se decida efectuar.

4. D (30) = 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30

De dos formas, en cajas de 5 o de 6 figuras.

5. Repuesta tipo: Manuel quiere empaquetar 45 bombones en cajas sin que sobre ninguno y con el mismo número de bombones cada una. Indica de cuántas maneras diferentes podrá hacerlo.

Anotaciones

TAREA COMPETENCIAL

La fábrica de golosinas

Faltan unas semanas para Halloween y en la fábrica de golosinas Dulzón todas las máquinas funcionan a pleno rendimiento para abastecer a tiendas y supermercados de los productos más demandados en estas fechas. **Estas son algunas de sus golosinas más populares.**

10 unidades en cada bolsa

8 unidades en cada bolsa

… unidades en cada bolsa

12 unidades en cada bolsa

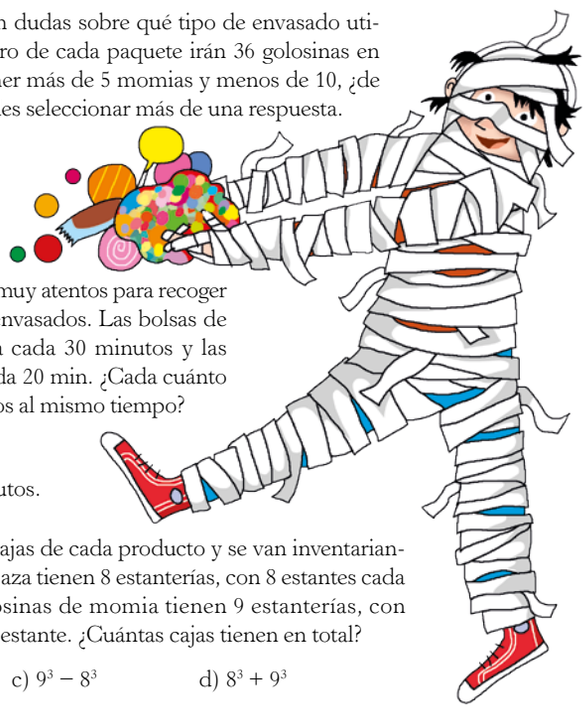
Ayuda a sus trabajadores y resuelve las diferentes situaciones que se les presentan.

1 Desde el departamento de ventas tienen dudas sobre qué tipo de envasado utilizar con las golosinas de momia. Dentro de cada paquete irán 36 golosinas en pequeñas bolsas. Si cada bolsa debe tener más de 5 momias y menos de 10, ¿de qué forma podrán empaquetarlas? Puedes seleccionar más de una respuesta.

a) 6 bolsas con 6 momias.

b) 5 bolsas con 8 momias.

c) 4 bolsas con 9 momias.



2 En las cintas de producción deben estar muy atentos para recoger los productos cuando terminan de ser envasados. Las bolsas de golosinas de calabaza salen de la cinta cada 30 minutos y las de las golosinas con forma de mano, cada 20 min. ¿Cada cuánto tiempo deberán recoger ambos productos al mismo tiempo?

a) Cada 40 minutos. c) Cada hora.

b) Cada 50 minutos. d) Cada 30 minutos.

3 En el almacén se van almacenando las cajas de cada producto y se van inventariando las existencias. De golosinas de calabaza tienen 8 estanterías, con 8 estantes cada una y 8 cajas en cada estante. De golosinas de momia tienen 9 estanterías, con 9 estantes en cada una y 9 cajas en cada estante. ¿Cuántas cajas tienen en total?

a) $(8 + 9) \times 3$ b) $8 \times 3 + 9 \times 3$ c) $9^3 - 8^3$ d) $8^3 + 9^3$

4 Para finalizar el inventario, se cuentan las piruletas de Frankenstein. De momento solo tienen 10 estantes, con 10 cajas cada uno y 10 bolsas en cada caja. ¿Cuántas piruletas tienen?

a) 10^2 b) 1 000 c) 10^4 d) 10^5

Pág. 34 Sugerencias metodológicas

Las mismas orientaciones metodológicas que para la Tarea competencial de la unidad 1.

Soluciones

1. Opciones a y c.

2. Opción b.

3. Opción d.

4. Opción c.

REPASO

1. Escribe los siguientes problemas en forma de potencia:
   a) Hay 25 mujeres, cada una con un collar con 25 perlas.
   b) En un jardín hay 6 rosales, con 6 rosas cada uno, y cada rosa tiene 6 pétalos.

2. Marta, Isabel, Alejandro y Ángel quieren juntar las postales que tiene cada uno (50, 40, 60 y 75) para hacer un mural cuadrado. ¿Cuántas postales tendrá cada lado del mural?

3. Expresa en potencias de 10 las siguientes cantidades.
   a) 3 000 b) 50 000 c) 32 000

4. Construye el cuadro del paso de 10^2 al 12^2.

5. Averigua, sin efectuar el cálculo del cubo, el paso de un cubo de 3 a otro mayor de 5.

6. Indica qué números de los siguientes son primos.
   a) 10 b) 11 c) 23 d) 25

7. Encuentra los divisores de estos números (y que no sean ellos mismos).
   a) 16 b) 25 c) 32

8. Escribe dos números múltiplos de los siguientes números primos.
   a) 2 y 3 b) 3 y 5 c) 2 y 5

Anotaciones

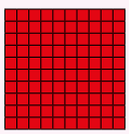
Pág. 35 Soluciones

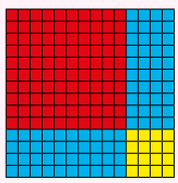
1. a) 25^2 b) 6^3

2. Cada lado del mural tendrá 15 cromos.

3. a) 3×10^3 b) 5×10^4 c) 32×10^3

4. Representación gráfica de 10^2 Representación gráfica de 14^2





5. Sería añadir dos filas en las tres dimensiones (alto, ancho y alto) quedando una esquina cúbica de 23.

6. a) No es primo. b) Es primo. c) Es primo. d) 2 No es primo.

7. a) 1, 2, 4, 8 b) 1, 5 c) 1, 2, 4, 8, 16

8. a) 6 y 12 b) 15 y 30 c) 10 y 20

3 DIVISIBILIDAD Y FRACCIONES

Presentación de la unidad

La unidad 3 está compuesta por dos grandes contenidos. El primero de ellos es el referido a los números primos y compuestos, los criterios de divisibilidad (o cómo establecer si un número es primo o compuesto) y los conceptos de mínimo común múltiplo y de máximo común divisor. El segundo es la suma y resta de fracciones con distinto denominador, pero ahora aplicando para ello la técnica del mínimo común múltiplo. Todo ello se complementa con la resolución de problemas específicos de estos dos contenidos.

Ya en la unidad anterior se iniciaron los alumnos en los conceptos de números primos y compuestos, así como en los de múltiplos y divisores. En la presente unidad se sistematizan todas estas nociones. Se persigue que los alumnos sean capaces de dominar los conceptos de M.C.M. y de M.C.D. y resolver las situaciones y problemas prácticos en los que haya que emplear estos saberes. El trabajo con fracciones es mucho más funcional, pues se han trabajado con intensidad en los cursos anteriores. Se trata de que los alumnos incorporen la técnica del empleo del M.C.M. para, en un conjunto de fracciones de distinto denominador, establecer el denominador común partiendo de la descomposición factorial de esos denominadores. Esta técnica es importante que sea dominada, pues sirve para cualesquiera fracciones y también será muy útil para el aprendizaje de las fracciones algebraicas en la ESO.

Sugerencias metodológicas

El texto habla sobre la importancia de la divisibilidad y su relevancia en la educación secundaria. Se menciona que el concepto de mínimo común múltiplo (m.c.m.) es relativamente fácil de entender, mientras que el máximo común divisor presenta mayor dificultad debido a la invención y resolución de problemas relacionados. Se destaca la necesidad de tratar estos conceptos con cuidado, dedicando tiempo y enfatizando las diferencias entre ellos.

Además, se recomienda que los docentes enseñen la criba de Eratóstenes en grupo, con toda la clase. Mediante esta actividad, el alumnado puede comprender fácilmente el m.c.m. de números primos, identificando el número en el que coinciden por primera vez. También se menciona la posibilidad de trabajar con los divisores comunes de varios números utilizando la criba. Por último, se sugiere utilizar esta técnica para resolver problemas y situaciones concretas que requieran el uso de estos conceptos.

Resolución de problemas

En esta unidad, los problemas más comunes se relacionan con la divisibilidad y la aplicación del m.c.m. en la suma y resta de fracciones con diferentes denominadores. También se destaca la importancia de los problemas de doble inclusión, que abarcan las operaciones aditivas y multiplicativas y presentan un nivel de dificultad mayor. Estos problemas deben ser trabajados en la educación secundaria y requieren una atención especial. Además, en la situación de aprendizaje para desarrollar las tareas competenciales de esta unidad se utilizan múltiplos, divisores y fracciones con diferentes denominadores, en lugar de potencias, como en la unidad anterior.

Educación en valores

La unidad se enfoca en el concepto de división más allá de las matemáticas en el apartado de valores. Se plantean interrogantes sobre la comprensión de los escolares acerca de la división fuera del contexto numérico, su percepción de si es positiva o negativa, y en qué situaciones de la vida real encuentran el término dividir.

Se invita a analizar los distintos conceptos asociados a dividir, como separar y repartir, y se solicita a los alumnos que proporcionen ejemplos tanto positivos (como separar el trigo de la paja) como negativos (como la guerra que separa familias).

Adicionalmente, se destaca la existencia de sinónimos de dividir, como trocear, cortar, fraccionar, partir, quebrar, romper, distribuir, entre otros, los cuales pueden enriquecer la comprensión del término y su relación con las matemáticas, generando diversas oportunidades de análisis en el aula.

Recursos y materiales recomendados

Por otra parte, como material impreso disponemos de una rica y precisa selección de actividades en el blog de Actiludis que nos permitirá comprender y afianzar tanto las escalas como las divisiones por dos cifras.

- Piezas Lego para el trabajo de múltiplos, divisores, números primos y compuestos.
- M.C.D. y m.c.m con piezas de construcción.

- Mural para la criba de Eratóstenes de Juan Antonio Durán Siles.
- Manipulables o proyectables.
- Criba de Eratóstenes.
- Múltiplos y divisores.
- Criba de Eratóstenes en excel y vídeo de explicación.
- Criba de Eratóstenes en Scratch.
- Actividad lúdica para aplicar la criba de Eratóstenes.

Pensamiento computacional

Cálculo mental:

En esta tercera unidad nos centraremos en el trabajo divisiones, potencias y fracciones.

- División:
  - Divisiones de tres o cuatro cifras con o sin decimales entre una cifra.
  - Fomentar el uso de las siguientes estrategias: reparto por órdenes de unidades a modo creciente de la división.
- Potencias:
  - Cuadrados de semi-decenas.
  - Cuadrados de decenas incompletas.
- Fracciones:
  - Sumas y restas de fracciones con diferente denominador.

Esquema

Divisibilidad y fracciones

Operaciones

- Números primos y compuestos.
- Criba de Eratóstenes.
- Criterios de divisibilidad básicos y complementarios.
- Máximo Común Múltiplo. Concepto.
- Máximo Común Divisor. Concepto.
- Suma y resta de fracciones con distinto denominador por el M.C.M.
- Sumas y restas de fracciones con números naturales.

Problemas

- Problemas de operaciones con fracciones.
- Problemas de M.C.M y M.C.D.
- PAEV2 Doble inclusión nivel III. Estructuras Aditivas.
- PAEV2 Doble inclusión nivel III. Estructuras Multiplicativas.

Anotaciones

3 DIVISIBILIDAD Y FRACCIONES

Números primos y criba de Eratóstenes

Un **número primo** es aquel que solo tiene dos divisores: él mismo y la unidad.

Una criba es una selección; la **criba de Eratóstenes** es un procedimiento que permite seleccionar todos los números primos menores de un número natural dado. En el ejercicio 1, vamos a verlo con el 100.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

1 Construye en tu cuaderno una tabla del 100 como la anterior. Vas a descubrir todos los números primos menores de 100.

1.º A partir del 2 (sin contarlo), tacha todos sus múltiplos (tacha de dos en dos).

2.º Cuando hayas acabado, a partir del 3, tacha todos los múltiplos de 3 (tacha de tres en tres).

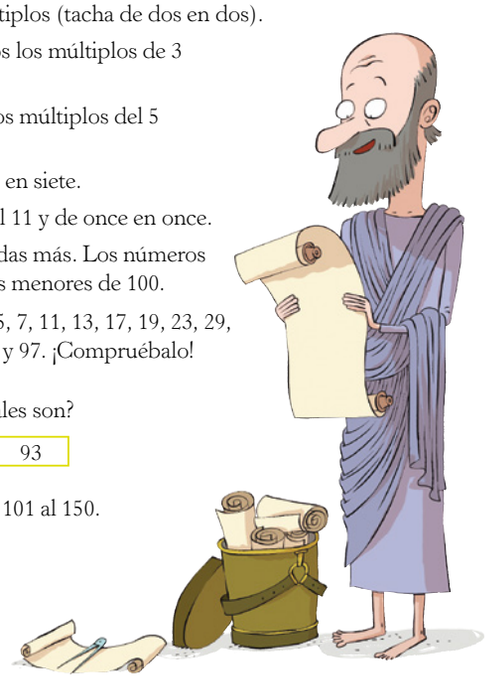
3.º El 4 ya está tachado. A partir del 5, tacha todos los múltiplos del 5 (tacha de cinco en cinco).

4.º El 6 ya está tachado. A partir del 7, tacha de siete en siete.

5.º El 8, el 9 y el 10 están tachados. Tacha a partir del 11 y de once en once.

6.º Sigue así contando y tachando hasta que no puedas más. Los números que te quedan sin tachar son los números primos menores de 100.

Si lo has hecho bien, te han debido salir: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 y 97. ¡Compruébalo!



2 Entre estos números hay tres números primos. ¿Cuáles son?

23	33	43	53	63	93

3 Selecciona, en tu cuaderno, los números primos del 101 al 150.

101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150

Pág. 36 Sugerencias metodológicas

La criba de Eratóstenes es un algoritmo que permite hallar todos los números primos menores que un número natural dado. Se forma una tabla con todos los números naturales comprendidos entre 2 y el número dado, que al principio puede ser el 100. A partir del 2 se van tachando los números de dos en dos, a partir del tres, de 3 en 3, a partir de 5 (el cuatro ya se ha tachado) de cinco en cinco, y así sucesivamente. Los números que queden sin tachar son los números primos.

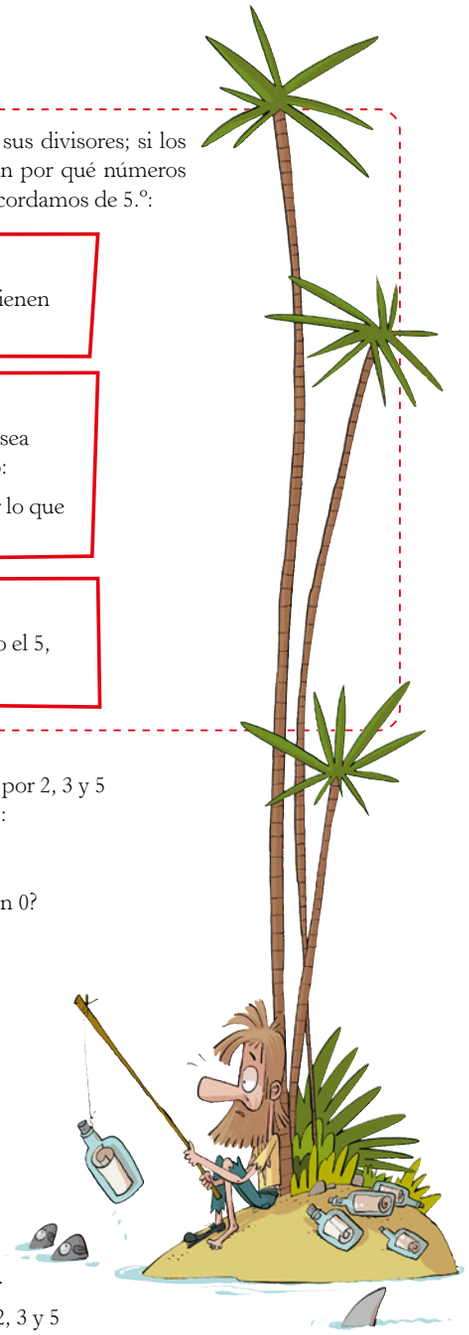
Soluciones

2. 23, 43 y 53.

3.

101	~~102~~	103	~~104~~	~~105~~	~~106~~	107	~~108~~	109	~~110~~
~~111~~	~~112~~	113	~~114~~	~~115~~	~~116~~	~~117~~	~~118~~	~~119~~	~~120~~
121	~~122~~	~~123~~	~~124~~	~~125~~	~~126~~	127	~~128~~	~~129~~	~~130~~
131	~~132~~	~~133~~	~~134~~	~~135~~	~~136~~	137	~~138~~	139	~~140~~
~~141~~	~~142~~	~~143~~	~~144~~	~~145~~	~~146~~	~~147~~	~~148~~	149	~~150~~

Criterios de divisibilidad



Si los números son pequeños, es muy fácil encontrar sus divisores; si los números son muy grandes, hay pistas que nos indican por qué números son divisibles. Son los criterios de divisibilidad. Los recordamos de 5.º:

Criterio de divisibilidad por 2

Todos los números que acaben en 0 o en cifra par, tienen el 2 como divisor. Por ejemplo: 2 420, 1 112, 25 438.

Criterio de divisibilidad por 3

Todos los números en los que la suma de sus cifras sea múltiplo de 3, tienen el 3 como divisor. Por ejemplo:

3 252 → 3 + 2 + 5 + 2 = 12. 12 es múltiplo de 3, por lo que 3 252 es divisible entre 3.

Criterio de divisibilidad por 5

Todos los números que tienen como cifra final el 0 o el 5, tienen el 5 como divisor. Por ejemplo: 1 950, 9 995.

1 Clasifica los siguientes números, según sean divisibles por 2, 3 y 5 (pueden ser divisibles por más de un número a la vez):
312, 225, 125, 632, 654, 5 292, 9 594 y 12 482.

2 ¿Es posible que haya algún número primo que acabe en 0? ¿Y en 6? ¿Y en 8? ¿Por qué?

3 Completa en tu cuaderno la siguiente tabla.

N.º	ES DIVISIBLE POR…		
	2	3	5
28	Sí	No	No
51	…	…	…
306	…	…	…
172	…	…	…
180	…	…	…

4 Escribe dos números que sean a la vez divisibles por…

a) … 2 y 3 b) … 3 y 5 c) … 2 y 5 d) … 2, 3 y 5

Anotaciones

Soluciones

1. Divisibles solo por 2: 632 y 12 482.

Divisible solo por 5: 125.

Divisibles por 2 y por 3: 312, 654, 5 292, 9 594.

Divisible por 3 y por 5: 225.

2. La respuesta en todos los casos es no. Los números acabados en 0 son múltiplos, al menos, del 2 y del 5. Y los acabados en 6 y 8 lo son al menos del número 2.

3.

N.º	ES DIVISIBLE POR…		
	2	3	5
28	Sí	No	No
51	**No**	**Sí**	**No**
306	**Sí**	**Sí**	**No**
172	**Sí**	**No**	**No**
180	**Sí**	**Sí**	**Sí**

Pág. 37 Sugerencias metodológicas

Ejercicio 1. Se les pide que construyan una tabla como la que sigue, de modo que en cada número determinen si es divisible por 2, 3 o 5.

	2	3	5
312	×	×	
225		×	×
125			×
632	×		

	2	3	5
654	×	×	
5 292	×	×	
9 594	×	×	
12 482	×		

4. Respuesta libre. En cualquier caso, deben reunir las condiciones que se expresan:

a) Deben ser 6 y un múltiplo de seis, o dos múltiplos de seis.

b) Deben ser 15 y un múltiplo de quince, o dos múltiplos de quince.

c) Deben ser 10 y un múltiplo de diez, o dos múltiplos de diez.

d) Deben ser 30 y un múltiplo de treinta, o dos múltiplos de treinta.

Anotaciones

Pág. 38 Sugerencias metodológicas

La página completa los criterios de divisibilidad correspondientes a los primeros números primos. Nuestra experiencia nos dice que el aprendizaje de estos dos criterios (los correspondientes al 7 y al 11) se realiza con rapidez y, además, suscita interés en los alumnos y las alumnas. Los ven como algo mágico.

Actividades de ampliación

Para fijar mejor los criterios, se les plantean ejercicios con números grandes que no sean múltiplos de 7 ni de 11, con el objetivo de que ellos manipulen las cifras con el fin de convertirlos en múltiplos de estos números. Por ejemplo:

En el caso del número 7, se trabaja con números de tres cifras:

1. El número 852 no es múltiplo de 7. Modifica la cifra de las unidades para que sí lo sea.

   852 → 85 y 4. 85 − 4 = 81. No es múltiplo de 7.

   854 → 85 y 8. 85 − 8 = 77. Sí es múltiplo de 7

   En el caso del número 11 se pueden proponer números de cuatro cifras:

2. El número 6 221 no es múltiplo de 11. Modifica la cifra de las decenas para que sí lo sea.

   6 221 → 8 y 3 → 8 − 3 = 5.

   6 281 → 14 y 3 → 14 − 3 = 11.

Criterios de divisibilidad por 7 y por 11

Criterio de divisibilidad por 7

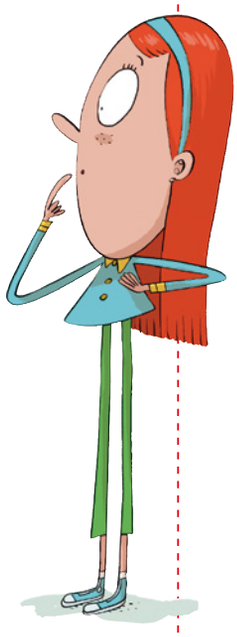
238

1. Separamos la cifra de las unidades: **23 8**
2. Del número que resulta (23), resta el doble de la cifra de las unidades (2 × 8 = 16) → 23 − 16 = 7. Como 7 es múltiplo de 7, 238 es divisible por 7.

2 261

Si el número es muy grande, repetimos el proceso:

1. Separamos la cifra de las unidades: **226 1**
2. Del número que resulta (226), resta el doble de la cifra de las unidades (2 × 1 = 2) → 226 − 2 = 224
3. Repetimos el proceso. Separamos las unidades: 22 4
4. Del número que resulta (22), resta el doble de la cifra de las unidades (2 × 4 = 8) → 22 − 8 = 14. Como 14 es múltiplo de 7, 2 261 es divisible por 7.



Criterio de divisibilidad por 11

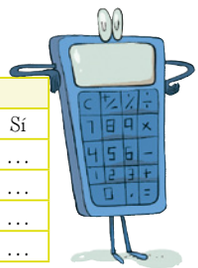
429

1. Suma las cifras que ocupan los lugares impares (U y C) → 9 + 4 = 13
2. Suma las cifras que ocupan los lugares pares (D, UM…) → 2
3. Resta ambas cantidades → 13 − 2 = 11

Si la diferencia es 0 o múltiplo de 11, el número es divisible por 11.

1 Comprueba si 476 y 8 274 son divisibles por 7.

2 Sin hacer las divisiones, completa la tabla en tu cuaderno para saber qué números son divisibles por 7 y por 11. Compruébalo con la calculadora.



N.º	¿DIVISIBLE POR 7?	
525	52 − 10 = 42	Sí
343	…	…
351	…	…
2 261	…	…
3 101	…	…

N.º	¿DIVISIBLE POR 11?			
121	1 + 1 = 2	2	2 − 2 = 0	Sí
457	…	…	…	…
4 224	…	…	…	…
60 379	…	…	…	…
20 482	…	…	…	…

Soluciones

1. 476 → 47 y 6. 47 − 12 = 35. Es divisible por 7.

8 274 → 827 y 4. 827 − 8 = 819 → 81 − 18 = 63. Es divisible por 7.

2.

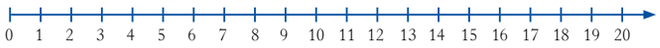
N.º	¿DIVISIBLE POR 7?	
525	52 − 10 = 42	Sí
343	34 − 6 = 28	Sí
351	35 − 2 = 33	No
2 261	226 − 2 = 224	Sí
3 101	310 − 2 = 308	Sí

N.º	¿DIVISIBLE POR 11?			
121	1 + 1 = 2	2	2 − 2 = 0	Sí
457	7 + 4 = 11	5	11 − 5 = 6	No
4 224	2 + 4 = 6	2 + 4 = 6	6 − 6 = 0	Sí
60 379	9 + 3 = + 6 = 18	0 + 7 = 7	18 − 7 = 11	Sí
20 482	2 + 4 + 2 = 8	0 + 8 = 8	8 − 8 = 0	Sí

Mínimo común múltiplo (m.c.m.)

El mínimo común múltiplo (m.c.m.) es el múltiplo común más pequeño posible (sin contar el cero) de dos o más números.

Observa la siguiente recta numérica. A continuación, hemos indicado los primeros múltiplos de 2, 4 y 5.



Múltiplos de 2: 2 → 4 → 6 → 8 → 10 → 12 → 14 → 16 → 18 → 20

Múltiplos de 4: 4 → 8 → 12 → 16 → 20

Múltiplos de 5: 5 → 10 → 15 → 20

El menor múltiplo común de 2, 4 y 5 es el 20. Vamos a practicar con ello.

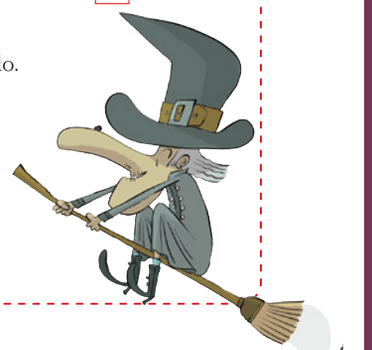
Sin contar el 0, y dentro de los veinte primeros números, responde:

a) ¿Qué múltiplos comunes tienen 2 y 4?

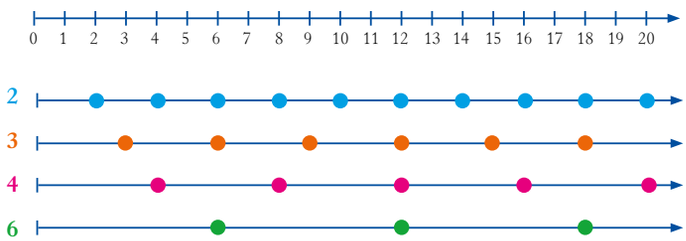
b) ¿Cuál es el múltiplo más pequeño de 2 y 4?

c) ¿Qué múltiplos comunes tienen 2 y 5?

d) ¿Qué múltiplos comunes tienen 4 y 5?



1 Observa estas rectas numéricas donde hemos señalado los múltiplos de 2, 3, 4 y 6. A continuación, calcula los m.c.m. que te pedimos.



a) 2 y 3

b) 3 y 4

c) 2, 3 y 6

d) 2 y 4

e) 3 y 6

f) 3, 4 y 6

g) 2 y 6

h) 4 y 6

i) 2, 3, 4 y 6

Anotaciones

Pág. 39 Sugerencias metodológicas

El modelo que se ofrece para la comprensión del concepto de m.c.m. es muy intuitivo. Cualquier otro modelo que pueda elegir el docente debe tener las características de este. Especialmente, que tenga los múltiplos de todos los números a la vista. Se les recuerda a los niños y a las niñas que algo de eso ya hacían ellos en cursos anteriores cuando buscaban una fracción equivalente a otras, pues iteraban o repetían el denominador de la mayor hasta que encontraban uno que era divisible por el denominador de todas las fracciones: 3/4 + 1/2 + 2/3. Se iteraba el denominador mayor:

- 8 (4 + 4). Le viene bien al 4 y al 2, pero no al denominador 3.
- 12 (4 + 4 + 4). Les viene bien para los tres.

Es decir, que sin saberlo, ellos ya hallaban el m.c.m.

Para una mejor construcción del concepto, el docente debe pedirles:

- Que trasladen el modelo formal que aquí se les muestra a otros más reales. Por ejemplo, a una pista cerrada y al tiempo que tardan los corredores en darle la vuelta. O en una parada de autobús y los momentos en que coinciden dos o tres de los autobuses que tienen distinta frecuencia, etc.
- Que creen el ciclo de coincidencias. En el caso del ejemplo del libro, no vuelve a haber coincidencia hasta el 40. ¿En qué número volverán a coincidir? ¿Y cuál será el siguiente número en el que volverán a coincidir?

Finalmente, es bueno traducir los términos a un lenguaje más asequible. El mínimo común múltiplo es lo mismo que el múltiplo común más pequeño.

Soluciones

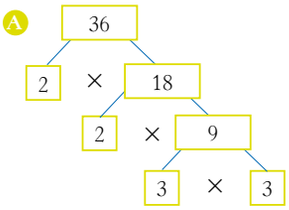
1. a) 6 b) 4 c) 6
d) 12 e) 6 f) 12
g) 6 h) 12 i) 12

Anotaciones

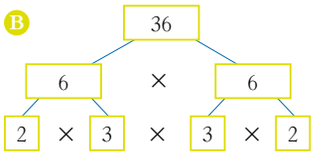
Descomposición factorial

Para encontrar rápidamente el m.c.m., utilizamos la descomposición factorial. Se trata de descomponer el número en todos los productos que lo forman. Observa los ejemplos de las descomposiciones del 36 (la más habitual es la C).

A



B



C

36	2
18	2
9	3
3	3
1	

Expresado en forma de potencias → $36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^2 \times 3^2$

Para buscar el m.c.m. de 70, 20 y 42, usamos la descomposición factorial aplicando lo que sabemos sobre criterios de divisibilidad.

70	2
35	5
7	7
1	

$70 = 2 \times 5 \times 7$

20	2
10	2
5	5
1	

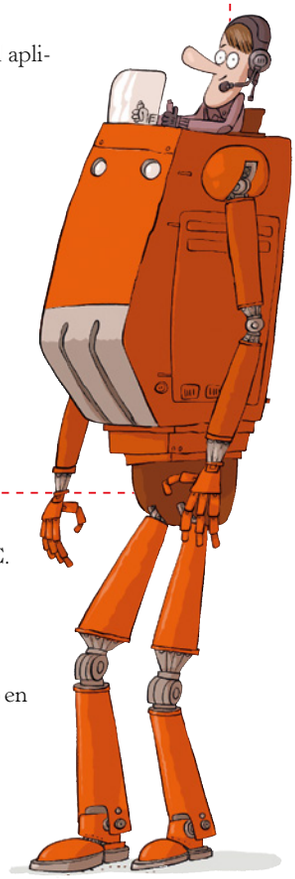
$20 = 2^2 \times 5$

42	2
21	3
7	7
1	

$42 = 2 \times 3 \times 7$

m.c.m. $(70, 20, 42) = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7 = 420$

El m.c.m. de 70, 20 y 42, para que sea múltiplo de todos, debe contener en su descomposición los factores que sean comunes (con exponente mayor) y todos los no comunes.



1 Haz la descomposición factorial de estos números como en el ejemplo C.

a) 30 c) 64 e) 90

b) 75 d) 56 f) 250

2 Expresa, en forma de potencias, las descomposiciones que has realizado en el ejercicio anterior.

3 Por último, calcula el m.c.m. de:

a) 30 y 64 c) 30 y 90 e) 30 y 75

b) 30 y 56 d) 30 y 250 f) 64 y 90

Pág. 40 Sugerencias metodológicas

La página se ocupa de la descomposición factorial. Cuando los escolares se enfrentan a la misma por primera vez suelen encontrar dificultades porque hasta ese momento las divisiones las hacían por números completos. Debemos enseñarles a que, en estos casos, trabajen con el valor posicional de las cifras. Es decir, que si el número a descomponer es de tres o cuatro cifras (o más), hagan la descomposición cifra a cifra, y no tratando el número como un bloque. En un ejemplo, si el número a descomponer es 6 155, que no «dividan» 6 155 entre cinco, sino que hallen la quinta parte de 6 millares, de 15 decenas y de 5 unidades. Una vez que lo entienden, realizan las descomposiciones con gran rapidez.

Soluciones

1. a)

30	2
15	3
5	5
1	

b)

75	3
25	5
5	5
1	

c)

64	2
32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	

d)

56	2
28	2
14	2
7	7
1	

e)

90	2
45	3
15	3
5	5
1	

f)

250	2
125	5
25	5
5	5
1	

2. a) $2 \times 3 \times 5$ c) 2^6 e) $2 \times 3^2 \times 5$

b) 3×5^2 d) $2^3 \times 7$ f) 2×5^3

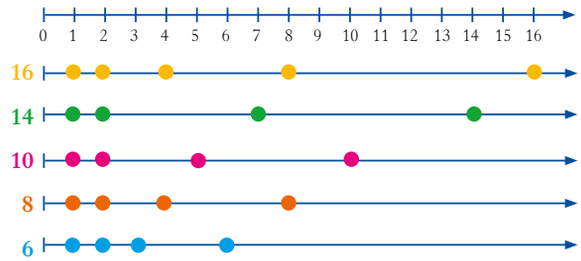
3. a) 960 c) 90 e) 150

b) 1 680 d) 1 500 f) 2 880

Máximo común divisor (m.c.d.)

El máximo común divisor (m.c.d.) es el mayor divisor común de dos o más números.

Observa esta recta numérica, en la que hemos marcado los divisores de 16, 14, 10, 8 y 6.



Vamos a practicar con ello. Sin contar el 0, y dentro de los dieciséis primeros números, responde:

a) ¿Por qué números es divisible 16? ¿Y 14? ¿Y 10? ¿Y 8 y 6?

b) ¿Qué divisores comunes tienen 16 y 14? ¿Y 8? ¿Y 8 y 16?

c) ¿Qué divisores comunes tienen 16, 14, 10, 8 y 6?

Para buscar el m.c.d., usamos la descomposición factorial y los criterios de divisibilidad. ¿Cuál sería el m.c.d. de 70, 20 y 42?

m.c.d. (70, 20 y 42) = 2. Para que sea divisor de los tres, debe contener en su descomposición los factores que sean comunes (con el exponente menor).

70 | 2	20 | 2	42 | 2
35 | 5	10 | 2	21 | 3
7 | 7	5 | 5	7 | 7
1	1	1

$70 = 2 \times 5 \times 7$

$20 = 2^2 \times 5$

$42 = 2 \times 3 \times 7$

1 Realiza la descomposición factorial de los siguientes números.

a) 20 b) 44 c) 60 d) 55 e) 72 f) 150

2 Expresa en forma de potencias las descomposiciones que has realizado en el ejercicio anterior.

3 Por último, calcula el m.c.d. de:

a) 20 y 44 b) 60 y 44 c) 55 y 72 d) 20, 55 y 150 e) 44, 60 y 72

Anotaciones

Pág. 41 Sugerencias metodológicas

El máximo común divisor es más difícil de conceptualizar que el mínimo común múltiplo. En parte, porque es menos frecuente la necesidad de su uso y, también, porque el nombre puede resultar equívoco: máximo, cuando se trata de coger los menores exponentes. Por ello, se puede utilizar, al comienzo, el término de «divisor común mayor». El modelo de las rectas numéricas es muy intuitivo.

Como habíamos señalado en la página dedicada al m.c.m., también aquí hay que trabajar la aplicación del modelo formal a situaciones reales de la vida: capacidades de botellas, envases de objetos, agrupamientos de escolares, etc.

Soluciones

1. a)

20 | 2
10 | 2
5 | 5
1

b)

44 | 2
22 | 2
11 | 11
1

c)

60 | 2
30 | 2
15 | 3
5 | 5
1

d)

55 | 5
11 | 11
1

e)

72 | 2
36 | 2
18 | 2
9 | 3
3 | 3
1

f)

150 | 2
75 | 3
25 | 5
5 | 5
1

2. a) 22×5 b) 22×11 c) $22 \times 3 \times 5$ d) 5×11 e) 23×32 f) $2 \times 3 \times 52$

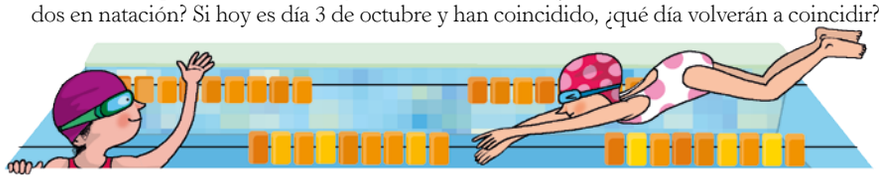
3. a) 2 b) 2 c) No tiene. d) 5 e) 2

Anotaciones

Problemas de m.c.m.

Sigo los pasos y resuelvo el problema

1 Nerea va a la piscina cada 4 días y Carlota cada 5 días. ¿Cada cuántos días coincidirán las dos en natación? Si hoy es día 3 de octubre y han coincidido, ¿qué día volverán a coincidir?



1. Como se busca la coincidencia de un suceso, será necesario sacar los múltiplos del 4 y del 5 hasta encontrar dicha coincidencia.

   M (4) = 4, 8, … M (5) = 5, 10, …

2. Establece cada cuántos días coincidirán.
3. Establece en qué fecha volverán a coincidir.

Resuelvo problemas

2 Puedo ordenar mi colección de sellos colocando en cada hoja del álbum 8 o 6 sellos por página. ¿Cuál es el mínimo número de sellos que tengo?

3 Por una parada de autobús pasan las líneas 1, 2 y 3. La 1 pasa cada 5 min, la 2 cada 6 min y la 3 cada 10 min. Si coinciden los autobuses de las tres líneas en la parada a las siete de la tarde, ¿a qué hora volverán a encontrarse en esa parada? Haz un esquema en tu cuaderno.

4 Rocío, Virginia y Carmen entrenan todos los días en el polideportivo. Empiezan a correr a la vez, pero Rocío tarda 60 segundos en completar una vuelta, mientras que Virginia tarda 80 y Carmen, 120. ¿Cuántas vueltas dará cada una para poder encontrarse nuevamente en el punto de salida?

Invento, creo y razono

5 Inventa un problema de m.c.m a partir de esta pregunta y resuélvelo.

¿Qué día volverán a coincidir en la biblioteca?

Pág. 42 Sugerencias metodológicas

Se pretende en esta página que el alumnado conozca la utilidad del m.c.m para resolver determinadas situaciones problemáticas.

Como ya sucedía con los problemas de múltiplos y divisores, este tipo de situaciones no se centra en el uso de las operaciones aritméticas. Por ello, debe modelizarse el proceso de resolución de estos, marcando bien los pasos a seguir (como se muestra en el primer apartado de la página) e incidiendo en la correcta redacción de las soluciones.

Los problemas 1, 3 y 4 se ajustan muy bien al modelo de las rectas numéricas que se han utilizado en la presentación del concepto de m.c.m.

Por otra parte, para que entiendan mejor el problema 2 se les puede orientar para que iteren el 8 y vayan viendo si el número total de sellos que se obtienen, con esa iteración, se pueden distribuir en páginas de 6.

Se cierra la página con el apartado Invento, creo y razono. Debe inventar un problema de m.c.m. a partir de la pregunta.

Soluciones

1. Coincidirán cada 20 días. Si hoy es día 3 volverán a coincidir el 23 de octubre.

2. Tengo un mínimo de 24 sellos.

3. Volverán a coincidir a las 7 y media de la tarde.

AUTOBÚS	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30
1	5 10 15 20 25 30
2	6 12 18 24 30
3	10 20 30

4. Rocío dará 4 vueltas; Virginia, 3, y Carmen, 2.

5. Respuesta abierta.

Problemas de m.c.d.

Sigo los pasos y resuelvo el problema

1 Alberto y Cristina quieren transportar 45 cajas de refresco de naranja y 60 de limón en carritos que lleven el mismo número de cajas, pero que sea el mayor número posible de cajas de cada refresco y que no sobre ninguna. ¿Cuántas cajas debe transportar cada carrito? ¿Cuántos carritos necesitaremos para transportar cada tipo de refresco?

1. Necesitamos hallar el número más grande que divide a ambas cantidades (m.c.d). Para ello, utilizamos la descomposición factorial.

45		60	m.c.d. = ?
?		?	

2. Ahora, partiendo del número de cajas de refresco que puede transportar cada carrito, hallamos el número de carritos de cada sabor.

Resuelvo problemas

2 En el salón A de un hotel hay 16 personas, y en el B, 24. Se tienen que trasladar para una excursión siguiendo las siguientes condiciones:

- Solo pueden pedir un medio de transporte.
- En cada viaje, el medio de transporte debe ir lleno.
- Se debe hacer el menor número de viajes posible.

¿Cuántas personas deberán ir en ese medio de transporte? ¿Qué número de plazas del medio de transporte coincide en ambos casos?

3 Tengo dos garrafas de agua: una, con una capacidad de 12 L, y otra, donde caben 10 L. ¿Qué capacidad máxima debe tener una jarra que vacíe ambas garrafas sin que sobre nada y que no sea de un litro? ¿Cuántas jarras podremos llenar con cada garrafa?

Invento, creo y razono

4 Inventad un problema de m.c.d. a partir de los siguientes datos y resolvedlo.

15 invitados – 20 invitadas – equipos

Anotaciones

Pág. 43 Sugerencias metodológicas

En esta página se muestra al alumnado la utilidad que puede tener el m.c.d. De nuevo es importante que el docente ejemplifique con situaciones concretas. Se debe modelizar el proceso de resolución marcando bien los pasos a seguir (como se muestra en el primer apartado de la página).

Los problemas propuestos van encaminados no solo a hallar el máximo común divisor, sino que a partir de su obtención se lanzan nuevas preguntas en las que se utiliza el m.c.d. como dato para poder responderlas.

Soluciones

1. m.c.d. = 15 refrescos

45 : 15 = 3 carritos 60 : 15 = 4 carritos

2. En el salón A podrían irse en cada viaje 2, 4, 6, 8 o 16 personas.

En el salón B podrían irse en cada viaje 2, 3, 4, 6, 8,12 o 24 personas.

m.c.d. = 8. Coincide en ambos casos el medio con 8 plazas.

3. m.c.d. = 2 L.

12 : 2 = 6 jarras 10 : 2 = 5 jarras.

4. Respuesta tipo: a una fiesta de Halloween han acudido 15 invitados y 20 invitadas. Para realizar unos juegos se decide hacer equipos con el mismo número de chicos y chicas cada uno y con el máximo número de integrantes posible. ¿Cuántos integrantes tendrá cada equipo?

Sol: 5 integrantes

Anotaciones

Pág. 44 Sugerencias metodológicas

La página comienza con un breve recordatorio sobre la suma y resta de fracciones con el mismo denominador. Ya en el recuadro siguiente se introduce el nuevo procedimiento, utilizando el mínimo común múltiplo de los denominadores de las fracciones que constituyan la operación. Ante esta situación se ha de hacer ver a los niños lo que sigue:

1.º El M.C.M. no es nada distinto a lo que ellos hacían en cursos anteriores, cuando a partir de la iteración del denominador mayor se buscaba uno que fuera múltiplo del otro denominador. La ventaja que tiene el M.C.M. es que sirve para cualesquiera denominadores y para cualquiera que fuera su tamaño.

2.º Una vez hallado el nuevo denominador, se ha de trabajar con los niños que hay que modificar los nuevos numeradores, de manera que al final siga habiendo la misma proporción entre numerador y denominador de la que había al principio.

3.º El proceso de buscar un denominador común no tiene nada que ver con las fracciones se sumen o se resten. Sea una u otra operación, el procedimiento es el mismo.

Ejercicio 1. Es un ejercicio de aplicación de sumas de fracciones con el mismo denominador.

Ejercicio 2. Es un ejercicio de aplicación de sumas de fracciones con distinto denominador, en el que se puede aplicar el M.C.M. La mayor parte de los niños lo harán sin necesidad de hacer ningún cálculo, pues los denominadores son pequeños.

Ejercicio 3. Como el ejercicio 2, pero ahora son sustracciones.

Ejercicio 4. Es el más complejo. Exige la generalización de lo que se sabe hacer con los denominadores de dos fracciones a los de tres fracciones, y se mezclan las sumas y las restas de fracciones.

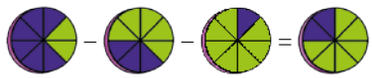
Repaso de sumas y restas de fracciones

Sumas y restas de fracciones con el mismo denominador

Recordamos que la suma y la resta de fracciones con el mismo denominador son operaciones muy sencillas, pues se trata de reunir o añadir piezas o trozos (los numeradores) del mismo tamaño y con la misma referencia. O, en el caso de la resta, sustraer o quitar.

Observa los ejemplos de suma y resta respectivamente.

$\frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{6}{5}$



$\frac{6}{8} - \frac{3}{8} - \frac{1}{8} = \frac{2}{8}$

Cuando combinamos las sumas y las restas se hace de la misma forma. Recuerda reducir el resultado a la fracción irreducible.

$$\frac{5}{6} + \frac{4}{6} - \frac{7}{6} = \frac{5+4-7}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Suma y restas de fracciones con denominadores diferentes y pequeños

Cuando la suma y la resta de fracciones tiene denominadores diferentes, se buscan las fracciones equivalentes que tengan el mismo denominador. Para ello, averiguamos el m.c.m. de los denominadores y completamos el numerador para formar la fracción equivalente.

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{8}{12} + \frac{3}{12} = \frac{11}{12} \qquad \frac{1}{2} - \frac{2}{5} = \frac{5}{10} - \frac{4}{10} = \frac{1}{10}$$

1 Calcula estas sumas y restas de fracciones con el mismo denominador.

a) $\frac{6}{7} - \frac{1}{7}$ b) $\frac{1}{6} + \frac{2}{6}$ c) $\frac{7}{8} - \frac{3}{8}$ d) $\frac{8}{9} + \frac{4}{9} - \frac{7}{9}$

2 Calcula las siguientes sumas de fracciones de diferentes denominador.

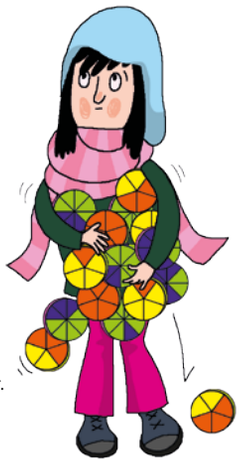
a) $\frac{3}{4} + \frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{5} + \frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$ d) $\frac{2}{3} + \frac{3}{6}$

3 Calcula las siguientes restas de fracciones de diferentes denominador.

a) $\frac{4}{5} - \frac{1}{3}$ b) $\frac{3}{5} - \frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{3} - \frac{3}{4}$ d) $\frac{2}{3} - \frac{3}{6}$

4 Calcula las siguientes sumas y restas de fracciones de diferentes denominador.

a) $\frac{3}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$ b) $\frac{6}{8} + \frac{2}{4} - \frac{1}{2}$ c) $\frac{9}{3} - \frac{4}{2} - \frac{1}{6}$



Soluciones

1. a) $\frac{5}{7}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{5}{9}$

2. a) $\frac{17}{12}$ b) $\frac{8}{15}$ c) $\frac{5}{4}$ d) $\frac{7}{6}$

3. a) $\frac{7}{15}$ b) $\frac{4}{15}$ c) $\frac{5}{12}$ d) $\frac{1}{6}$

4. a) 1 b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{5}{6}$

Suma y resta de fracciones con denominadores grandes

Cuando los denominadores son grandes, hay que descomponerlos en factores primos para encontrar el m.c.m. Antes de iniciar la operación, observa si puedes reducir las fracciones a otras más pequeñas, con lo que las operaciones serán más sencillas de hacer. Observa este ejemplo.

$$\frac{5}{8} + \frac{12}{18} + \frac{3}{15}$$

Sin reducir previamente las fracciones:

1. Se descomponen los denominadores en sus factores primos: $8 = 2^3$; $18 = 2 \times 3^2$; $15 = 3 \times 5$.
2. Hallamos el m.c.m. para obtener el denominador común: $2^3 \times 3^2 \times 5 = 360$.
3. Se hallan las fracciones equivalentes y se calcula:

$$\frac{5}{8} + \frac{12}{18} + \frac{3}{15} = \frac{225}{360} + \frac{240}{360} + \frac{72}{360} = \frac{537}{360} \quad \text{reducida } \frac{179}{120}$$

Reduciendo las fracciones antes de calcular:

Podemos reducir la segunda y la tercera fracción. Ahora la suma es más sencilla.

$$\frac{5}{8} + \frac{12}{18} + \frac{3}{15} = \frac{5}{8} + \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{75}{120} + \frac{80}{120} + \frac{24}{120} = \frac{179}{120}$$

1 Utiliza el m.c.m. para resolver estas operaciones.

a) $\frac{3}{5} + \frac{2}{6} + \frac{4}{30} + \frac{6}{10}$ b) $\frac{38}{45} - \frac{4}{9} - \frac{1}{3}$ c) $\frac{3}{20} + \frac{3}{4} - \frac{2}{5}$

Cómo sumar o restar un entero a una fracción

$2 + \frac{4}{5}$ $2 - \frac{4}{5}$

1. Convertimos el número 2 en una fracción impropia de denominador 5.
   Para ello, multiplicamos y dividimos por 5: $2 \times \frac{5}{5} = \frac{10}{5}$ que es igual a 2.
2. Lo sumamos como ya sabemos hacer: $2 + \frac{4}{5} = \frac{10}{5} + \frac{4}{5} = \frac{14}{5}$
   Si fuese una resta, procederíamos igual: $2 - \frac{4}{5} = \frac{10}{5} - \frac{4}{5} = \frac{6}{5}$

2 Resuelve estas operaciones.

a) $4 + \frac{7}{8}$ b) $6 - \frac{7}{5}$ c) $3 - \frac{3}{5} + \frac{3}{8}$

Anotaciones

Pág. 45 Sugerencias metodológicas

La suma y la resta de fracciones son operaciones ya conocidas y practicadas por los niños y las niñas. Sin embargo, quedaba por tratar la forma general de reducir al común denominador cualquier fracción, y no solo las que tengan un denominador pequeño. Por ello, se explica la utilización de la técnica del m.c.m. para buscar ese denominador común.

En cursos anteriores ya se obraba así. Se iba iterando el denominador mayor hasta que se encontraba uno que fuera múltiplo de los otros. Normalmente ese número era el primer múltiplo común a todos los que encontraban. El problema es que se hacía con números pequeños y con ejemplos sencillos. Ahora se sistematiza y se formaliza ese procedimiento, obviando la dificultad que tendría actuar del modo anterior cuando los denominadores a reducir fueran números altos.

El segundo aspecto que ocupa la página es la suma y resta de un número natural con una fracción. También se repasa lo que ya se había trabajado en cursos anteriores: la conversión de ese número en una fracción impropia. Tras ello, y al obtenerla con el mismo denominador que aquella a la que se le va a sumar, la resolución de la operación de sumar o de restar no acarrea ninguna dificultad.

Soluciones

1. a) $\frac{5}{3}$ b) $\frac{1}{15}$ c) $\frac{1}{2}$

2. a) $\frac{39}{8}$ b) $\frac{23}{5}$ c) $\frac{11}{40}$ d) 4

Anotaciones

3 Suma las siguientes fracciones. Si se puede, simplifica el resultado.

a) $\frac{3}{7}+\frac{2}{7}+\frac{1}{70}$ b) $\frac{3}{4}+\frac{6}{5}$ c) $\frac{6}{4}+4$ d) $\frac{5}{8}+\frac{3}{8}+8$

4 Resuelve las siguientes restas y simplifica si se puede.

a) $\frac{5}{9}-\frac{2}{9}-\frac{1}{9}$ b) $\frac{6}{8}-\frac{1}{5}$ c) $5-\frac{2}{5}$ d) $4-\frac{3}{7}-\frac{1}{7}$

5 Aquí tienes algunos hechos históricos. Para saber en qué fecha ocurrieron, resuelve las operaciones y no te olvides de simplificar.

Nacimiento de la democracia en Atenas → $\frac{11}{24}+\frac{1}{6}$

Caída del imperio romano → $\frac{3}{4}-\frac{1}{20}$

Invención de la imprenta → $\frac{3}{4}-\frac{1}{12}$

Llegada de Colón a América → $\frac{3}{20}+\frac{3}{5}$

Primera Revolución Industrial → $\frac{13}{18}-\frac{2}{9}$

Revolución francesa → $\frac{5}{24}+\frac{3}{8}$

Descubrimiento de la anestesia → $\frac{3}{4}-\frac{3}{20}$

Descubrimiento de los rayos X → $\frac{13}{20}+\frac{1}{4}$

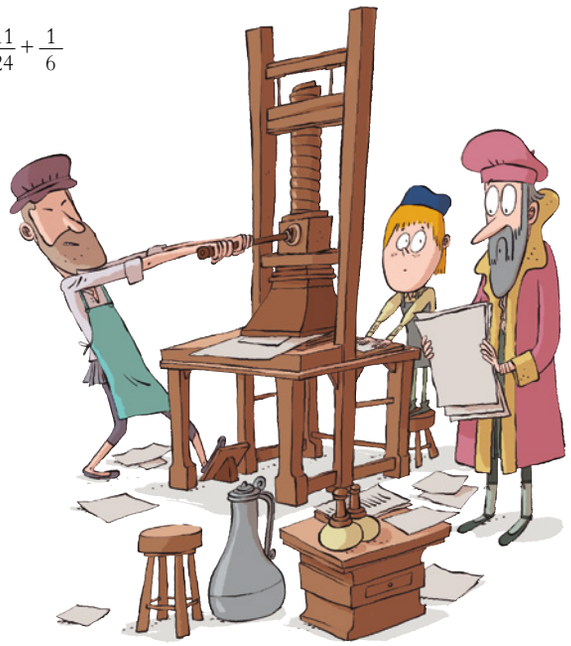
Primera Guerra Mundial → $\frac{5}{12}-\frac{1}{6}$

Descubrimiento de la insulina → $\frac{1}{18}+\frac{1}{6}$

Descubrimiento de la penicilina → $\frac{13}{30}-\frac{1}{6}$

Bombas atómicas en Hiroshima y Nagasaki → $\frac{5}{18}-\frac{1}{6}$

Llegada a la Luna → $\frac{1}{4}+\frac{7}{12}$



¡Cuidado! Quizá te sobre alguna clave.

Claves

$\frac{1}{9}$ 1945	$\frac{4}{15}$ 1928	$\frac{3}{5}$ 1842-1846	$\frac{7}{10}$ 476	$\frac{9}{10}$ 1895	$\frac{1}{4}$ 1914-1918	$\frac{2}{3}$ 1453	$\frac{9}{10}$ 1985
$\frac{2}{9}$ 1920	$\frac{1}{2}$ 1750-1840	$\frac{5}{8}$ 460 a. C.	$\frac{3}{4}$ 1492	$\frac{11}{10}$ 2015	$\frac{7}{12}$ 1789	$\frac{5}{6}$ 1969	$\frac{11}{10}$ 2015

Pág. 46 Soluciones

3. a) $\frac{51}{70}$ b) $\frac{39}{20}$ c) $\frac{11}{2}$ d) 9

4. a) $\frac{2}{9}$ b) $\frac{29}{40}$ c) $\frac{23}{5}$ d) $\frac{24}{7}$

5. Nacimiento de la democracia en Atenas, $\frac{5}{8}\rightarrow$ 460 a. C.

Caída del Imperio romano, $\frac{7}{10}\rightarrow$ 476 d. C.

Invención de la imprenta, $\frac{2}{3}\rightarrow$ 1453

Descubrimiento de América, $\frac{3}{4}\rightarrow$ 1492

Primera Revolución Industrial, $\frac{1}{2}\rightarrow$ 1750-1840

Revolución francesa, $\frac{7}{12}\rightarrow$ 1789

Descubrimiento de la anestesia, $\frac{3}{5}\rightarrow$ 1842-1846

Descubrimiento de los rayos X, $\frac{9}{10}\rightarrow$ 1895

Primera Guerra Mundial, $\frac{5}{12}-\frac{1}{6}=\frac{1}{4}\rightarrow$ 1914-1918

Descubrimiento de la insulina, $\frac{2}{9}\rightarrow$ 1920

Descubrimiento de la penicilina, $\frac{4}{15}\rightarrow$ 1928

Bombas atómicas en Hiroshima y Nagasaki, $\frac{1}{9}\rightarrow$ 1945

Llegada a la Luna, $\frac{5}{6}\rightarrow$ 1969

La clave $\frac{11}{10}\rightarrow$ 2015 no corresponde a ninguna operación.

Problemas con fracciones

Resuelvo problemas

1. Los dos octavos de las piezas para construir un castillo son grises; un cuarto son marrones, y el resto, de varios colores. ¿Qué fracción de piezas son de colores variados?

2. Lucía regala las cinco doceavas partes de su colección de cromos a su hermana y dos sextos a su hermano. ¿Qué fracción de cromos ha regalado? ¿Qué fracción de cromos le queda?

3. Tres amigas han ido a una pizzería. Silvia se ha comido cuatro décimas partes de la pizza; Carmen, las dos cuartas partes, y Claudia, el resto de la pizza. ¿Qué fracción de pizza se ha comido Claudia?

4. En una fiesta se han consumido las siguientes bebidas: las dos quintas partes han sido de refresco de cola, las tres décimas partes han sido de refresco de naranja, y las cuatro quinceavas partes, de refresco de limón. ¿Qué fracción de bebida se consumió en total? ¿Sobró alguna cantidad? Si es así, exprésala en una fracción.

5. A Manuel le han regalado 2 cajas de bombones. Si ya se ha comido $\frac{5}{12}$ de una caja, ¿qué fracción de las dos cajas le queda?

6. Ángel ha comprado 3 packs de botellas de agua para su familia. Si en casa ya tenía $\frac{2}{6}$ de un pack. ¿Qué fracción de packs de botellas de agua tienen ahora?

Invento, creo y razono

7. Inventa un problema que se resuelva con una suma y una resta de fracciones a partir de los siguientes datos. Luego, resuélvelo.

Dos tercios

Cinco sextos

Anotaciones

Pág. 47 Sugerencias metodológicas

Los problemas 1, 2, 3 y 4 son de suma y resta de fracciones con diferente denominador. El alumnado deberá hallar el común denominador para poder operar con dichas fracciones. Las situaciones son similares a las resueltas en cursos anteriores con fracciones de igual denominador por lo que el alumnado ya estará familiarizado con ellas, la complejidad está en la ejecución de las sumas y restas con diferente denominador.

Los problemas 5 y 6 son de suma y resta de un entero con una fracción. Son algo más complejos en cuanto a su comprensión, pero más sencillos en su ejecución. Se recomienda hacer algún problema de este tipo en gran grupo para orientar al alumnado sobre cómo proceder a la hora de resolverlos.

En el problema 7 se le pide al alumnado que invente un problema de dos operaciones con fracciones de diferente denominador. Es una tarea para afrontarla por equipos. Es importante que primero elijan la temática del problema y luego se centren en la elaboración del mismo para que encaje con las operaciones propuestas.

Soluciones

1. $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$ $\quad \frac{2}{8} + \frac{2}{8} = \frac{4}{8}$

$\frac{8}{8} - \frac{4}{8} = \frac{4}{8}$ (la mitad)

Son de colores variados la mitad de las piezas.

2. $\frac{2}{6} = \frac{4}{12}$ $\quad \frac{4}{12} + \frac{5}{12} = \frac{9}{12}$

$\frac{12}{12} - \frac{9}{12} = \frac{3}{12}$

Ha regalado $\frac{9}{12}$ de la colección.

Le quedan $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.

3. $\frac{4}{10} = \frac{8}{20}$ $\quad \frac{2}{4} = \frac{10}{20}$ $\quad \frac{8}{20} + \frac{10}{20} = \frac{18}{20}$ $\quad \frac{20}{20} - \frac{18}{20} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$

Claudia comió $\frac{1}{10}$ de pizza.

4. $\frac{2}{5} = \frac{12}{30}$ $\quad \frac{3}{10} = \frac{9}{30}$ $\quad \frac{4}{15} = \frac{8}{30}$ $\quad \frac{12}{30} + \frac{9}{30} + \frac{8}{30} = \frac{29}{30}$ $\quad \frac{30}{30} - \frac{29}{30} = \frac{1}{30}$

Se consumieron $\frac{29}{30}$ de bebida. Sobró $\frac{1}{30}$.

5. $2 - \frac{5}{12} = \frac{24}{12} - \frac{5}{12} = \frac{19}{12}$ de bombones le quedan.

6. $3 + \frac{2}{6} = \frac{18}{6} + \frac{2}{6} = \frac{20}{6}$ de botellas de agua.

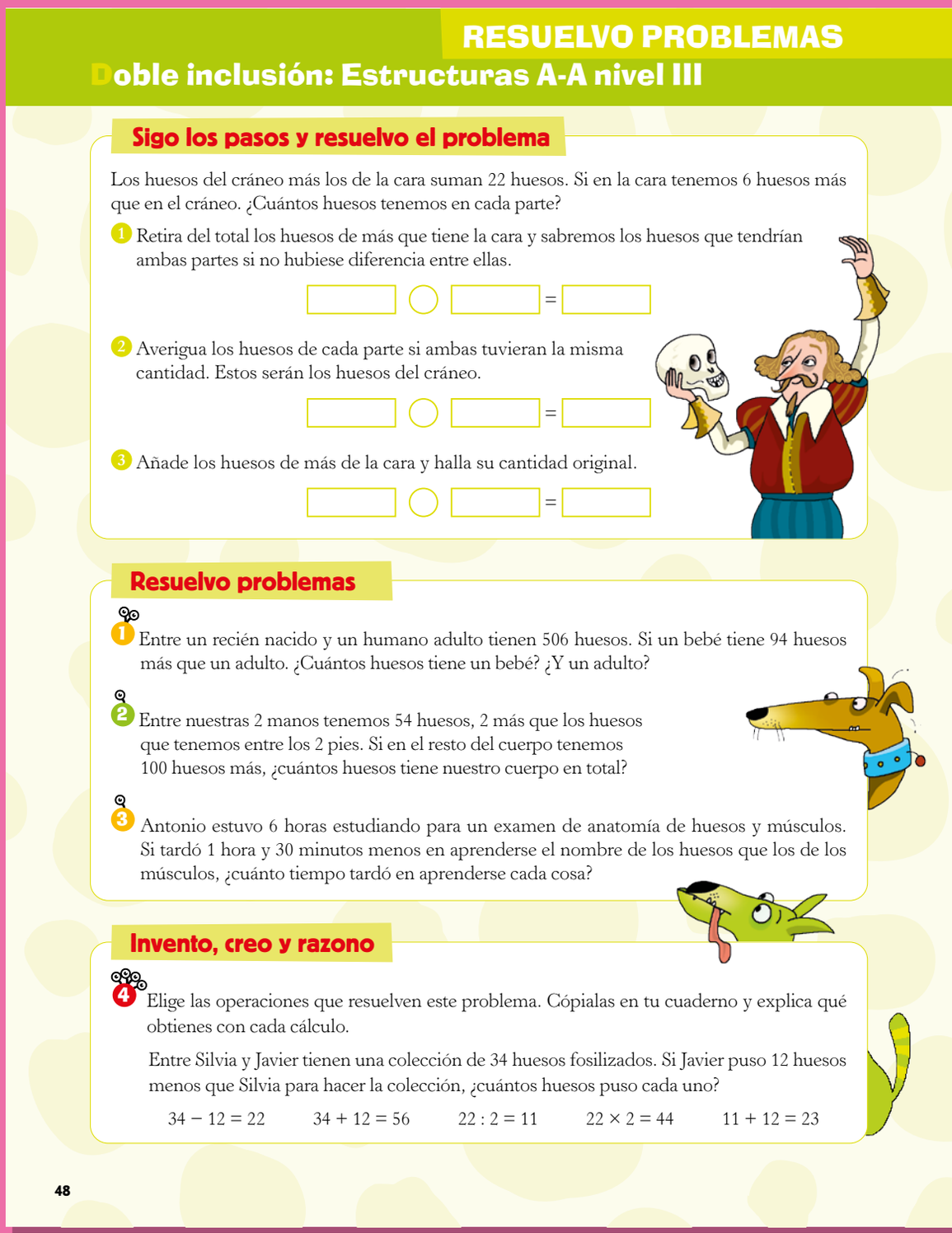
7. Respuesta abierta.

Pág. 48 Sugerencias metodológicas

Se retoma en esta página y en la siguiente el trabajo de los últimos problemas de la categoría de Doble inclusión ya vistos en 5.º de Primaria. Estos problemas que *a priori* son de dos operaciones pueden convertirse en PAEV3 y suponer el inicio del trabajo de los problemas con más de dos operaciones. Concretamente en esta página se repasan los problemas correspondientes a la tercera y última variante de la estructura A-A, la más compleja de todas.

Si nos fijamos en el problema del encabezado y preguntamos por los huesos del cráneo el problema sería de dos operaciones, pero si añadimos una pregunta más o preguntamos directamente por los huesos de cada parte de la cabeza lo convertiremos en un PAEV3.

Es altamente recomendable que antes de abordar los problemas propuestos en esta página el docente plantee situaciones manipulativas similares a las aquí recogidas (repartir 16 fichas entre dos personas sabiendo que una tendrá dos fichas más que la otra). La idea es que el alumnado busque diferentes formas de repartir una cantidad total de elementos sabiendo que uno se va a quedar con más elementos que el otro. De esta actividad manipulativa saldrán diversas estrategias que deben converger en la generalización de un proceso.


RESUELVO PROBLEMAS
Doble inclusión: Estructuras A-A nivel III
Sigo los pasos y resuelvo el problema
Los huesos del cráneo más los de la cara suman 22 huesos. Si en la cara tenemos 6 huesos más que en el cráneo. ¿Cuántos huesos tenemos en cada parte?
1 Retira del total los huesos de más que tiene la cara y sabremos los huesos que tendrían ambas partes si no hubiese diferencia entre ellas.
2 Averigua los huesos de cada parte si ambas tuvieran la misma cantidad. Estos serán los huesos del cráneo.
3 Añade los huesos de más de la cara y halla su cantidad original.
Resuelvo problemas
1 Entre un recién nacido y un humano adulto tienen 506 huesos. Si un bebé tiene 94 huesos más que un adulto. ¿Cuántos huesos tiene un bebé? ¿Y un adulto?
2 Entre nuestras 2 manos tenemos 54 huesos, 2 más que los huesos que tenemos entre los 2 pies. Si en el resto del cuerpo tenemos 100 huesos más, ¿cuántos huesos tiene nuestro cuerpo en total?
3 Antonio estuvo 6 horas estudiando para un examen de anatomía de huesos y músculos. Si tardó 1 hora y 30 minutos menos en aprenderse el nombre de los huesos que los de los músculos, ¿cuánto tiempo tardó en aprenderse cada cosa?
Invento, creo y razono
4 Elige las operaciones que resuelven este problema. Cópialas en tu cuaderno y explica qué obtienes con cada cálculo.
Entre Silvia y Javier tienen una colección de 34 huesos fosilizados. Si Javier puso 12 huesos menos que Silvia para hacer la colección, ¿cuántos huesos puso cada uno?
34 − 12 = 22 34 + 12 = 56 22 : 2 = 11 22 × 2 = 44 11 + 12 = 23
48

En el encabezado se muestra una forma (hay otras) de resolver este tipo de problemas, que insistimos, son de alta complejidad. Posteriormente, se plantean 3 problemas distintos que incluyen casos de las variantes trabajadas anteriormente. Finalmente, en el ejercicio 4 se le pide al alumnado que se selecciona las operaciones que resuelven el problema propuesto y explique qué se obtiene en cada paso.

Soluciones

Encabezado:

22 − 6 = 18

16 : 2 = 8 huesos en el cráneo.

8 + 6 = 14 huesos en la cara.

1. 506 − 94 = 412

412 : 2 = 206 huesos un adulto.

206 + 94 = 300 un bebé.

2. 54 − 2 = 52 54 + 52 + 100 = 206 huesos.

3. 6 h = 240 min 240 − 90 = 150

150 : 2 = 75 min/huesos

90 + 75 = 165 min/músculos.

4. 34 − 12 = 22 huesos entre los dos si no hubiese diferencias.

22 : 2 = 11 huesos puso Javier.

11 + 12 = 23 puso Silvia.

Doble inclusión: Estructuras A-M nivel III

Sigo los pasos y resuelvo el problema

Entre los alumnos de 1.º y los de 6.º conocen ya 32 músculos de nuestro cuerpo. Si los de 6.º saben 7 veces más músculos que los de 1.º, ¿cuántos músculos conoce cada grupo?

1. Halla el número de veces o partes que hay en la situación planteada.

   7 veces/partes alumnado 6.º + 1 vez/parte alumnado de 1.º = **8 veces/partes en total**

   ☐ ◯ ☐ = ☐

2. Averigua el precio de una vez o una parte. Será los músculos que conocen en 1.º.

   ☐ ◯ ☐ = ☐

3. Ahora es fácil calcular los músculos que conocen los de 6.º.

   ☐ ◯ ☐ = ☐

Resuelvo problemas

1. Entre una pequeña oruga y un ser humano tienen aproximadamente 2 400 músculos. Si la oruga tiene 3 veces más músculos que el ser humano, ¿cuántos músculos tiene una pequeña oruga? ¿Y un ser humano?

2. Para mover los ojos necesitamos 5 músculos aproximadamente. Cuando sonreímos necesitamos el triple de músculos, mientras que cuando nos enfadamos necesitamos 9 veces más músculos que para mover los ojos. ¿Cuántos músculos necesitamos en total para hacer todas estas acciones?

3. ¡Tengo fátiga muscular! Entre ayer y hoy he estado entrenando en el gimnasio cuatro horas y media. Si ayer entrené dos veces menos que hoy, ¿cuánto tiempo entrené cada día?

Invento, creo y razono

4. Inventa un problema similar al del encabezado a partir de las siguientes operaciones.

   5 + 1 = 6 veces/partes 300 : 6 = 50 300 − 50 = 250

Anotaciones

Si yo tengo 7 veces lo que tú tienes, entre los dos tenemos 8 veces/partes porque tú tienes una vez y yo 7. La comprensión de este concepto requiere manipulación con objetos que se encuentren en el aula (lápices, fichas de parchís, dominó, ajedrez…) planteando situaciones de este estilo. Una vez resuelta la pregunta oculta del problema será más sencillo saber lo que tiene cada uno. El alumnado tiende a resolver mal este PAEV2 porque no halla el número de partes o veces totales, sino que divide directamente el total entre las veces más o menos que tiene uno con respecto al otro.

En el encabezado se vuelve a plantear una actividad pautada para aprender a resolver este tipo de problemas, que insistimos, son de alta complejidad. Posteriormente, se plantean 3 problemas distintos que incluyen casos de las variantes anteriores. Finalmente, en el ej. 4 se le pide al alumnado que invente un problema a partir de las operaciones tomando como modelo el que se ha trabajado en el encabezado.

Esta situación es mejor afrontarla primero en gran grupo con ejemplos similares y luego ya en equipo con el ejercicio que se plantea.

Soluciones

Encabezado:

7 + 1 = 8 veces/partes

32 : 8 = 4 músculos/primero

4 × 7 = 28 músculos en 6.º.

Pág. 49 Sugerencias metodológicas

Se continúa en esta página con el repaso de los problemas de la categoría de Doble inclusión. Concretamente se trabajan los problemas correspondientes a la tercera y última variante de la estructura A-M, la más compleja de todas.

Si nos fijamos en el problema del encabezado y preguntamos por los músculos que conoce el alumnado de 1.º el problema sería de dos operaciones, pero si añadimos una pregunta más o preguntamos directamente por cuántos músculos conoce cada grupo/clase lo convertiremos en un PAEV3.

¡Muy importante! La clave de este PAEV2 está en que el alumnado comprenda cuántas partes o veces representan el total.

1. 3 + 1 = 4 veces/partes

2 400 : 4 = 600 músculos/ser humano

2 400 − 600 = 1 800 músculos/oruga.

2. 5 × 3 = 15 músculos/sonreír

5 × 9 = 45 músculos/enfadarnos

5 + 15 + 45 = 65 músculos/total.

3. 4 horas y media = 270 min 2 + 1 = 3 veces/partes

270 : 3 = 90 minutos/ayer

90 × 2 = 180 min/hoy.

4. Respuesta abierta.

Anotaciones

TAREA COMPETENCIAL

La fábrica de golosinas II

En la fábrica de golosinas Dulzón es el momento de atender los encargos y de suministrar sus productos correctamente. Estos son algunos de los pedidos que les han llegado. Ayuda a sus trabajadores a prepararlos.

PEDIDO 1	
Piruletas	28 bolsas
Calabazas	49 bolsas
Momias	70 bolsas
Manos	35 bolsas

PEDIDO 2	
Piruletas	36 cajas
Calabazas	24 cajas
Momias	32 cajas
Manos	15 cajas

PEDIDO 3	
Piruletas	1… bolsas
Calabazas	44 bolsas
Momias	27 bolsas
Manos	16 bolsas

1. La empresa que ha encargado el primer pedido quiere que las bolsas de golosinas vengan en cajas iguales, con el mismo número de bolsas cada una, sin mezclar los productos. ¿Cuál es el número máximo de bolsas que irá en cada caja, teniendo en cuenta que no puede sobrar ninguna?

a) 14 bolsas b) 7 bolsas c) 21 bolsas d) 4 bolsas

2. El segundo pedido es muy grande. Desde la fábrica de golosinas Dulzón necesitan transportarlo en dos vehículos. Un vehículo llenará $\frac{5}{6}$ de su capacidad y el otro $\frac{7}{8}$ de la suya. ¿Qué fracción de la capacidad de ambos vehículos llenarán en total? ¿Qué fracción les quedaría por llenar?

a) Llenarán $\frac{41}{24}$ y les quedaría $\frac{7}{24}$.

b) Llenarán $\frac{23}{12}$ y les quedaría $\frac{7}{12}$.

c) Llenarán $\frac{12}{8}$ y les quedaría $\frac{4}{8}$.

d) Llenarán $\frac{12}{6}$ y les quedaría $\frac{4}{6}$.

3. En el tercer pedido ha habido un pequeño accidente que ha borrado una cifra del número de bolsas de piruletas que quieren. El encargado sabe que el dígito que falta convierte la cantidad en un número divisible entre 3,9 y 2 al mismo tiempo. ¿Cuál es la cifra que falta?

a) 6 b) 9 c) 5 d) 8

50

Pág. 50 **Sugerencias metodológicas**

Las mismas orientaciones metodológicas que en las anteriores tareas competenciales.

Soluciones

1. Opción b.

2. Opción a.

3. Opción d.

REPASO

1 Indica si 2, 3, 5, 7 y 11 dividen a estos números.

a) 456 b) 473 c) 294 d) 1 610

2 Calcula el máximo común divisor de estos números.

a) 21 y 35 b) 18 y 24 c) 70 y 45 d) 16, 28 y 8

3 Calcula el mínimo común múltiplo de estos números.

a) 6 y 14 b) 8 y 15 c) 7 y 16 d) 9, 8 y 12

4 Calcula las siguientes operaciones de fracciones.

a) $\frac{3}{4} + \frac{1}{5}$ b) $\frac{6}{8} - \frac{1}{2}$ c) $\frac{9}{3} + \frac{4}{2} - \frac{1}{6}$

5 Calcula las siguientes operaciones de fracciones con números naturales.

a) $7 + \frac{3}{4}$ b) $\frac{3}{5} + 6$ c) $8 - \frac{5}{2}$ d) $\frac{8}{3} - 2$

6 Paula quiere comprar 32 yogures. Vienen en envases que contienen menos de 16 y más de 2 yogures. ¿Cuántos envases distintos hay? ¿Cuántos yogures tiene cada envase?

7 Álvaro ha comprado 180 bolígrafos. Vienen en cajas (de menos de 20 y más de 5), y cada caja trae los mismos bolígrafos. Escribe todas las posibilidades de los bolígrafos que puede traer cada caja.

8 ¿Cuál es el mayor múltiplo de 10 que tiene tres cifras? Escribe ese múltiplo y el siguiente.

9 En una fábrica van a empaquetar en cajas 100 botellas de refresco. ¿Cuántas botellas deben caber en una caja para que no sobre ninguna botella? Escribe todos los tamaños posibles, salvo la caja en la que quepa una sola botella.

10 La baraja española tiene 40 cartas. ¿Cuántas personas pueden jugar sin que, al repartir las cartas, sobre o falte ninguna?

Anotaciones

Pág. 51 Soluciones

1. a) 2 y 3 b) 11 c) 2, 3 y 7 d) 2, 5 y 7

2. a) 7 b) 6 c) 5 d) 4

3. a) 42 b) 120 c) 112 d) 9, 8 y 12 72

4. a) 19/20 b) 1/4 c) 19/4

5. a) 31/4 b) 23/5 c) 11/2 d) 2/3

6. Hay dos envases distintos de yogures.
Cada envase tiene 4 u 8 yogures.

7. Las cajas pueden traer 6, 9, 10, 12, 15 o 18 bolígrafos.

8. El mayor múltiplo es 990. El siguiente, 1 000.

9. En las cajas pueden caber 2, 5, 10, 20, 25, 50 o 100 botellas.

10. Pueden jugar 2, 4, 5, 8, 10, 20 o 40 personas.

4 NÚMEROS ENTEROS

Presentación de la unidad

En esta unidad se sustancian contenidos de gran trascendencia: la ampliación del ámbito de la numeración, la consideración de los números que resultan del balance o la comparación de otros dos, los conceptos de números opuestos y del valor absoluto de un número, así como la ordenación de los números enteros. En lo que se refiere a las operaciones con números enteros, se trabajan las cuatro operaciones básicas y, en el caso de las operaciones combinadas, la jerarquía que hay que respetar para establecer el orden en que tales operaciones se han de realizar.

Sugerencias metodológicas

Los números enteros abarcan los números positivos y los números negativos. Pero los números negativos no suponen un conjunto homogéneo, sino que representan realidades que no tienen mucho que ver entre ellas:

- La línea del tiempo.
- La medición de las profundidades marinas, cuevas, etc.
- Algo tan habitual como los ascensores recogen en su panel números positivos y negativos.
- Las cuentas bancarias, las cartillas del banco, anotan los ingresos con números positivos y los pagos o el dinero que se saca con números negativos.
- Un caso particular es la medida de la temperatura que efectúa un termómetro. Refleja números positivos y negativos en función de que las temperaturas sean sobre cero o bajo cero. Pero reflejan cantidades cualitativas, que no tienen nada que ver con las cantidades que se han expuesto en los cuatro puntos anteriores. En el caso de las temperaturas, las diferencias en grados no tienen un valor determinado, sino apreciaciones establecidas. La suma de temperaturas o las relaciones entre ellas presentan la misma característica que se acaba de apuntar.

¿Qué queremos señalar con lo anterior? Que el docente debe saber emplear unas u otras situaciones en función de la ayuda intuitiva que estas aporten al alumnado. Por ejemplo, las diferencias entre el haber y el debe en las cuentas bancarias vienen muy bien para trabajar las operaciones y la regla de los signos. La temperatura que marca el termómetro refleja fielmente la recta numérica que incluye los números negativos, así como la distancia que se establece entre dos de esos números: de −4.º a 17.º van 21.º. La comprensión de la línea del tiempo va a ser necesaria a la hora de estudiar Historia o Ciencias Naturales, etc.

Resolución de problemas

Los problemas que se pueden resolver con números enteros son tan variados como las situaciones en las que se pueden aplicar. A lo largo de esta unidad, se plantean problemas de ascensor, temperatura, viaje en el tiempo, termómetro, saldo de cuenta bancaria, etc. La tarea de competencia de la unidad se basa en una situación de aprendizaje que simula el control de ingresos y gastos en la vida cotidiana. Además, hay problemas más generales. Dos páginas de la unidad están dedicadas a que el alumno construya la categoría de doble inclusión, una de las cuales utiliza estructuras aditivas y la otra multiplicativas. Es importante prestar especial atención a este tipo de problemas, ya que pueden resultar complicados.

Educación en valores

Aprovechando los números enteros, podemos trabajar los contravalores. Mediante su estudio y comprensión apreciaremos aún más el valor que contrarrestan.

Valores y contravalores que puede ser interesante trabajar en Primaria:

Valores	Contravalores	Valores	Contravalores
Igualdad	Desigualdad	Sabiduría	Ignorancia
Fraternidad	Enfrentamiento	Poder	Impotencia
Paz	Guerra	Prestigio	Difamación
Autorrealización	Fracaso	Seguridad	Inseguridad
Autoestima	Falta de autoestima	Honestidad	Mentira
Autocontrol	Impulsividad	Amistad	Soledad
Competencia	Incompetencia	Amabilidad	Tosquedad
Tolerancia	Intolerancia	Simpatía	Antipatía
Creatividad	Copia	Esfuerzo	Vagancia
Altruismo	Egoísmo	Respeto	Desconsideración
Felicidad	Tristeza	Empatía	Frialdad
Bondad	Maldad	Justicia	Injusticia

Recursos y materiales recomendados

El aprendizaje de los números enteros puede resultar difícil debido al vocabulario específico asociado a ellos. Por ello, esta unidad incluye actividades diseñadas para dominar el concepto. También recomendamos recursos que proporcionan explicaciones claras sobre cómo trabajar con números enteros utilizando situaciones manipulativas, como las escaleras de un edificio escolar; cada escalón hacia arriba se considera un número entero positivo, mientras que los escalones hacia abajo son negativos.

- Valor absoluto de números enteros con materiales manipulables de Yolanda Selma.
- Fichas de sumas y restas con enteros.
- Números enteros de la web «El Tanque Matemático».
- Comparación de números enteros.

Pensamiento computacional

Cálculo mental:

Repaso de productos y divisiones. Introducción de las sumas y restas con números enteros.

- Producto:
  - Productos de un dígito por un bidígito con decimales. $8 \times 2{,}3 - 9 \times 0{,}54 - \ldots$
  - Extender a decenas y centenas. $40 \times 3{,}6 - 70 \times 0{,}45 - 800 \times 6{,}3 - \ldots$
  - Fomentar el uso de las siguientes estrategias: cuando multiplicamos unidades por décimas o centésimas multiplicamos un dígito por un bidígito y luego convertir el resultado en unidades haciéndolo 10 o 100 veces más pequeño según corresponda.
- División:
  - Divisiones de tres o cuatro cifras (con o sin decimales) entre una cifra.
  - Fomentar el uso de las siguientes estrategias: reparto por órdenes de unidades a modo creciente de la división.
- Números enteros:
  - Sumas y restas sencillas de números enteros.

Esquema

Números enteros

Números

- Los números enteros.
- Números enteros como balance.
- Números opuestos y valor absoluto de un número.
- Ordenación de números enteros.

Operaciones

- Sumas y restas con números enteros.
- Producto y división de números enteros.
- Jerarquía de las operaciones combinadas expresadas con paréntesis.

Problemas

- Problemas sobre números enteros.
- Construir la categoría de Doble Inclusión: Aditiva-Aditiva.
- Construir la categoría de Doble Inclusión: Aditiva-Multiplicativa.
- Tarea competencial. Aprendo a controlar mis gastos.

Anotaciones

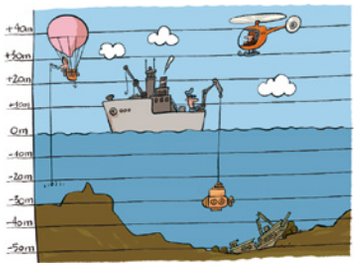
NÚMEROS ENTEROS

Hasta ahora hemos empezado siempre a contar desde el uno en adelante. ¿Pero qué ocurre cuando hay algo que contar antes del 1?

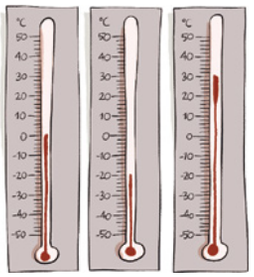
Observa estos ejemplos.

La línea del tiempo

Superficie y profundidad

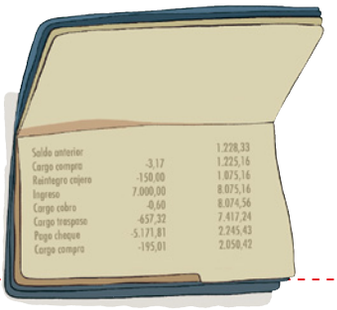


Temperaturas



Sótanos y ascensores

Cartilla bancaria



52

Págs. 52 y 53 Sugerencias metodológicas

Empezamos con varias situaciones de la vida real en las cuales es fácil expresar y reconocer los números enteros. Junto a estas actividades en el papel, aconsejamos la utilización del material manipulativo que hemos descrito en el apartado correspondiente a recursos y materiales recomendados y que ayudará muchísimo a la comprensión de estos conceptos. Tras la representación de los números enteros en la recta numérica, se plantean tres ejercicios de aplicación.

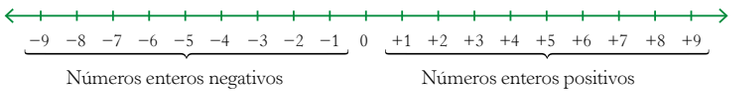
Ejercicio 1. El número es positivo en el caso de las letras a) y d), y negativo en el caso de las letras b), c) y e). Se debe aprovechar el ejercicio para que los escolares entiendan la siguiente distinción:

- En a), el número positivo lo es porque se adopta el punto de vista del equipo ganador. ¿Cómo sería el número si la referencia fuera el equipo perdedor? Un razonamiento similar se puede realizar para lo planteado en la letra c).
- En las letras restantes no se puede variar el punto de vista o la referencia. En b), al edificio no se le puede dar la vuelta. En d), no cabe sumergir el pico en el mar, y lo mismo sucede con e): si la temperatura es de −6 °C, no cabe ninguna consideración que la convierta en +6 °C.

Ejercicio 3. a) Sugerimos que debajo de los puntos de la recta numérica se escriba la temperatura: 8 grados, 5 bajo cero, etc., para que se compruebe la identificación entre enteros positivos y enteros negativos con la forma de enunciar las temperaturas.

Números enteros (I)

Los **números enteros** (se representan con la letra Z) están formados por los enteros positivos, los enteros negativos y el cero. Para escribirlos, se añade + o −, según el caso, y se representan en la recta numérica de la siguiente forma:



1 Escribe si el número es positivo o negativo en estas situaciones.

a) El partido acabó con tres goles a favor.

b) Aparqué el coche en el segundo sótano del hotel.

c) Debo 5 € a mi hermano.

d) El pico Mulhacén está a 3 478 metros sobre el nivel del mar.

e) Estamos a 6 °C bajo cero.

2 Junto al ascensor de un gran centro comercial hay un letrero que indica qué hay en cada planta.

a) Si entras andando desde la calle, ¿qué te encuentras en esa planta?

b) Indica en tu cuaderno los botones del ascensor que pulsarías si entras en coche, aparcas en el parking 2, compras una raqueta de tenis y un pañuelo para tu madre, y vuelves al coche.

3 Dibuja en tu cuaderno una recta numérica y representa las siguientes situaciones con números enteros.

a) Las temperaturas de esta semana han sido:

LUNES	MARTES	MIÉRCOLES	JUEVES	VIERNES	SÁBADO	DOMINGO
2 °C	1 °C bajo cero	3 °C bajo cero	4 °C	8 °C	5 °C bajo cero	6 °C

b) Un hombre rana se ha sumergido 6 metros hasta el fondo marino; otro se ha sumergido hasta la mitad de profundidad; un tercero los observa desde la superficie marina, y otro espera en el barco, a 1 metro sobre el nivel del mar.

c) Nuria tiene 3 €, Javi debe 5 €, Pedro ha ganado 12 € y Virginia ha perdido 6 €.

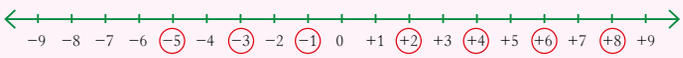
Anotaciones

Soluciones

1. a) Positivo. c) Negativo. e) Negativo.
b) Negativo.. d) Positivo.

2. El supermercado.
b) −2, +5, +1 y −2.

3. a)



b) Las soluciones son: −6, −3, 0, +1.
c) Las soluciones son: +3, −5, +12, −6.

Anotaciones

Pág. 54 Sugerencias metodológicas

La primera parte de la página se dedica a establecer la relación entre los términos del lenguaje diario y los signos que acompañan a los números enteros. Se debe aprovechar para que los niños y las niñas pongan más ejemplos: tener o deber, avanzar o retroceder desde un punto cero, el tiempo transcurrido en la proyección de un vídeo y el tiempo que falta para que termine, que son situaciones muy comunes para ellos, etc.

Ejercicio 1. Respecto a las relaciones entre números positivos y negativos, hay que poner el énfasis en que, en este caso, el cero sí se cuenta. De −1 a +1 la diferencia no es 1, sino 2: lo que va del −1 al 0, más lo que va del 0 al +1.

Ejercicio 2. La solución es sencilla. La explotación del ejercicio debe hacer ver a los niños y las niñas que, de manera convencional, se establece que al hecho de tener el mismo número de cromos se le adjudica el número cero, con independencia del número de cromos concreto que sea. Supongamos que, al principio, él y ella tuvieran 40 cromos. Al perder ella dos, retrocedería hasta el 38, y al ganar él seis, avanzaría hasta el 46. Por eso, la diferencia es 8. Es decir, que en la recta numérica se puede establecer cualquier número como «cero», y a partir de él contar los retrocesos o la cuenta atrás como números negativos y los avances como números positivos. En el caso de que lo que interese sea la diferencia que se genere al avanzar uno y retroceder la otra, es más sencillo plantearla dentro de los números enteros antes que en los números naturales.

Ejercicio 3. Se debe precisar que, en el caso de los números enteros, las diferencias pueden ser absolutas (como se verá más adelante) o también indicar el sentido de la evolución. Lo explicamos en cada caso.

Soluciones

1. Respuesta libre.

Números enteros (II)

Palabras relacionadas

En el vocabulario habitual hay palabras que indican acciones con los números enteros. Observa algunas de ellas:

- **Poner es + y quitar es −**

  Hay 10 cartas en la mesa: pones 2 cartas (+2) y quitas 5 (−5).

- **Subir es + y bajar es −**

  En mitad de una escalera: subes 3 escalones (+3) y bajas 4 (−4).

- **Ganar es + y perder es −**

  De un taco de cromos: ganas 10 cromos (+10) y pierdes 6 cromos (−6).

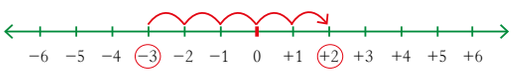
1 Escribe en tu cuaderno un ejemplo de cada uno de los casos anteriores.

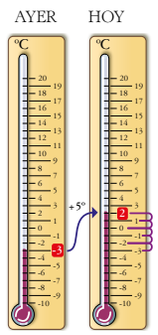
Relaciones entre enteros positivos y negativos

Los números enteros negativos son menores que los positivos: $-1 < 1$, y los números enteros positivos son mayores que los negativos, $1 > -1$. Hay que tener en cuenta que el intervalo entre ellos es la suma de las cantidades del número negativo hasta el 0 y de este hasta el número positivo.

Observa el ejemplo con las temperaturas del termómetro. Ayer hubo 3 °C bajo cero (−3 °C) y hoy hay 2 °C.

La diferencia de temperatura es de 5 °C, como podemos ver en la recta numérica. De −3 a 0 °C van 3 °C y de 0 a 2 van 2 °C; en total, 5 °C.





2 Mi compañera y yo teníamos el mismo número de cromos. Yo he ganado seis y ella ha perdido dos. ¿Qué diferencia de cromos tenemos ahora? Hazlo dibujando la recta numérica.

3 Observa el ejercicio 3, apartado a) de la página anterior e indica qué diferencia de temperatura hubo entre los siguientes días:

a) Lunes y miércoles. b) Martes y jueves. c) Viernes y domingo.

54

2. Ella ha perdido 2 (−2), y él ha ganado 6 (+6). Hay una diferencia de 8 cromos.

3. a) La diferencia de temperatura entre el lunes y el miércoles es de 5 grados. Ahora bien, como ha bajado, si se indica −5 se sabe, además de que hay cinco grados de diferencia, que esos cinco grados son descendentes, que ha disminuido la temperatura.

b) La diferencia es de 5 grados. Pero ahora ha subido la temperatura, por lo que también se puede expresar como +5.

c) La diferencia es de 2 grados. Pero, al bajar la temperatura, la información se puede completar señalando que la diferencia es de −2 grados.

Balance entre números enteros

Cuando comparamos pares de números, empleamos los números enteros para reflejar diversas situaciones. Observa la tabla clasificatoria de estos tres equipos de fútbol:

EQUIPO	JUGADOS	GANADOS	PERDIDOS	EMPATADOS	PUNTOS
REAL PULGUILLAS	8	6	0	2	20
NERVIOSOS FC	8	5	2	1	16
SPORTING RARRARRÁ	8	4	3	1	13

- El balance o relación de partidos ganados entre el Real Pulguillas y el Sporting Rarrarrá es de 6 a 4, es decir, +2 a favor del Real Pulguillas.
- El balance o relación de partidos ganados entre el Nerviosos FC y el Sporting Rarrarrá es de 5 a 4, es decir, −1 para el Sporting Rarrarrá.

1 Realiza la comparativa de balances entre:

a) Puntos entre Real Pulguillas y Nerviosos FC.

b) Puntos entre Sporting Rarrarrá y Nerviosos FC.

c) Puntos entre Sporting Rarrarrá y Real Pulguillas.

2 Nuestro equipo lleva un balance de 6 goles a favor. Si pierde un partido por 2-0, ¿cuál es ahora su balance de goles? ¿Y si pierde 3-1? ¿Y si gana 0-2? ¿Y si empata a 5?

3 Como he aprobado todo, mis padres me han dejado jugar con mi vecina varias partidas a mi videojuego favorito. Llevaba acumulados 248 puntos de otro día. Copia la tabla en tu cuaderno y realiza el balance de puntos.

PARTIDA	MI RESULTADO	EL RESULTADO DE MI VECINA	BALANCE	PUNTOS
1.ª	42	68	−26	248 − 26 = 222
2.ª	67	48	…	…
3.ª	39	72	…	…
4.ª	52	56	…	…
5.ª	123	89	…	…

Anotaciones

Pág. 55 Sugerencias metodológicas

En esta página se completan los contextos en los que se aplican los números enteros al balance o relación entre una pareja de números. Se emplean datos de competiciones deportivas porque estas son cercanas a los niños y las niñas y despiertan en ellos mucho interés, además de que ellos suelen conocer las reglas de funcionamiento de esas competiciones y los sistemas de anotación de resultados.

Hay que hacerles entender que en estos casos los números enteros son relativos a. Es decir, que hay que establecer un referente para saber el signo de la diferencia. Si el equipo «A» ha ganado al «B» por 4-0, el balance es, desde el punto de vista del equipo «A», +4, pero si se considera referente al equipo «B», el balance es de −4. Este aspecto es fácil de entender, y es bueno que se distinga entre estas situaciones y aquellas que no admiten relatividad o variación en el punto de vista: las temperaturas o la altura sobre el nivel del mar.

Ejercicio 1. Los resultados deben establecerse tomando como referencia al equipo nombrado en primer lugar.

Ejercicio 2. Hay que aclarar, en primer lugar, que los resultados y su consiguiente balance no son acumulativos. Por tanto, el balance se establece a partir de los seis goles a favor.

Soluciones

1. a) +4 b) −3 c) −7

2. Los balances que se van obteniendo son: +4, +2, +4, +4.

3.

PARTIDA	MI RESULTADO	EL RESULTADO DE MI VECINA	BALANCE	PUNTOS
1.ª	42	68	−26	248 − 26 = 222
2.ª	67	48	**+19**	**222 + 19 = 241**
3.ª	39	72	**−33**	**241 − 33 = 208**
4.ª	52	56	**−4**	**208 − 4 = 204**
5.ª	123	89	**+34**	**204 + 34 = 238**

Anotaciones

Números opuestos y valor absoluto

El **opuesto** de un número entero es el que se obtiene al cambiarlo de signo. Por ejemplo: 2 es opuesto de −2 y el opuesto de −3 es 3.

Llamamos **valor absoluto** de un número a la distancia a cero. Se indica escribiendo el número entre dos barras. Por ejemplo: el valor absoluto de −2 es 2 y se escribe así $|-2| = 2$.

De estas definiciones podemos deducir:

1. El +3 y el −3 tienen el mismo valor absoluto, porque ambos están a tres de distancia del cero.
2. También podemos decir que dos números opuestos serían dos números con el mismo valor absoluto, pero con distinto signo.

1 Completa este texto en tu cuaderno.

El número … de 10 es el −10 y el … de ambos, es 10, que se corresponde con la … de ambos números al número … .

Si sumamos cualquier número entero negativo con su …, el resultado siempre será … .

Ordenar números enteros

En los números positivos el orden creciente es $1 < 2 < 3 < 4 < 5$… pero en los números negativos es al revés: $-5 < -4 < -3 < -2 < -1$.

Para comprenderlo, analiza y explica las siguientes situaciones:

1. Tu madre te ha prestado cinco euros a ti y tres euros a tu hermano. ¿Quién debe más? ¿Quién debe menos?
2. Esta mañana hacía 2 °C bajo cero; ayer, 6 °C bajo cero y antes de ayer, 0 °C. ¿Qué día hizo más frío? ¿Y menos frío?

2 Indica en cada caso el número…

a) … anterior a −15. c) … posterior a −19.

b) … anterior a −1. d) … posterior a −8.

3 ¿Cuál es el valor absoluto del número posterior al −4? ¿Y el valor absoluto del número anterior al opuesto de 6?

Págs. 56 y 57 Sugerencias metodológicas

La página tiene dos partes. Una de ellas, se dedica a establecer dos conceptos: el de números opuestos y el de valor absoluto de un número. La otra, a fijar el criterio de ordenación de los números enteros. En el primer caso, son conceptos muy sencillos y que no requieren de mayor explicación que la que aparece. El número **opuesto** de 10 es el −10 y el **valor absoluto** de ambos es diez, que se corresponde con la **distancia o diferencia** de ambos números al número **0.** Si sumamos cualquier número entero negativo con su o**puesto,** el resultado siempre será **0.**

Ampliación. Respecto a la ordenación de números, se debe aprovechar para que los alumnos y las alumnas extiendan los criterios de ordenación a números decimales y fraccionarios. El criterio fundamental es que, en el caso de los números negativos, su crecimiento es hacia la izquierda, sea el número entero o tenga parte decimal. Es decir, que −4,36 es más pequeño que −4 y es mayor que −5. Si no tuviera signo, 4,36 sería mayor que 4 y menor que 5. Lo mismo ocurrirá con los números fraccionarios y mixtos. A los escolares más aventajados se les puede poner este tipo de ejercicios: Ordena las fracciones siguientes: −2/5, 1/5, −3/5, −1/5, −6/5.

Soluciones

1. El número **opuesto** de 10 es el −10 y el **valor absoluto** de ambos es diez, que se corresponde con la **distancia o diferencia** de ambos números al número 0. Si sumamos cualquier número entero negativo con su **opuesto**, el resultado siempre será **0.**

4 En la siguiente tabla aparecen las variaciones del precio de los artículos de un negocio por cambio de temporada. Ordena las variaciones de precio, de más altas a más bajas, de las camisas, de los pantalones y de los complementos.

CAMISAS		PANTALONES		COMPLEMENTOS	
Manga corta	8 €	Deporte	2 €	Cinturones	6 €
Manga larga	−5 €	Caballero	−2 €	Bolsos	−1 €
Estampadas	5 €	Señora	4 €	Pañuelos	3 €
Lisas	1 €	Infantil	0 €	Sombreros	−6 €
Camisa infantil	−3 €	Vaqueros	−4 €	Zapatos	9 €

5 Ordena de mayor a menos las variaciones de los precios de todos los artículos anteriores a la vez

6 Intercala números entre estos pares que te damos.

a) Dos números entre −2 y 2.

b) Dos números entre −5 y −8.

c) Dos números entre −1,8 y −1.

d) Dos números entre −4 y −3,6.

e) Dos números entre −1 y 0.

f) Dos números entre −5 y −4.

7 Ordena de menor a mayor.

a) −4, 0, 8, 2, −8, 6, −6, 4.

b) 3, −7, −1, −11, 1, 5, −5, −3.

c) −5, −8, 4, 1, 10 −14, −11, −2.

d) 9, −5, −21, −1, −29, −25, 3, −17.

8 Ayuda a aclarar el dinero que tienen y deben los siguientes compañeros y compañeras de clase. Primero, debes averiguar el dinero que realmente tiene o debe cada uno, y después, ordénalos del que menos tiene al que más tiene.

- Álvaro tiene 8 € y gana 5 €.
- Ángela debe 3 € y gasta 6 €.
- Nuria tiene 5 € y gasta 8 €.
- Javier tiene 25 € y gana 30 €.
- Manuel tiene 18 € y gasta 25 €.
- José Manuel debe 11 € y gasta 2 €.
- María debe 14 € y paga 8 €.
- Pedro debe 2 € y gasta 6 €.
- Natalia debe 22 € y gana 30 €.
- Paula tiene 6 € y gasta 12 €.

Anotaciones

2. a) −16 b) −18 c) −2 d) −7

3. 3 y 7

4. Camisas: manga corta, estampadas, lisas, camisa infantil y manga larga.

Pantalones: señora, deporte, infantil, caballero, vaqueros.

Complementos: zapatos, cinturones, pañuelos, bolsos, sombreros.

5. Respuesta libre. Por ejemplo:

a) −1 y 1 c) −1,7 y −1,5 e) −0,5 y −0,3

b) −6 y −7 d) −3,9 y −3,8 f) −4,8 y −4,5

7. a) $-8 < -6 < -4 < 0 < 2 < 4 < 6 < 8$

b) $-11 < -7 < -5 < -3 < -1 < 1 < 3 < 5$

c) $-14 < -11 < -8 < -5 < -2 < 1 < 4 < 10$

d) $-29 < -25 < -21 < -17 < -5 < -1 < 3 < 9$

8.

1	Álvaro, +13	6	José Manuel, −13
2	Ángela, −9	7	María, −22
3	Nuria, −3	8	Pedro, −8
4	Javier, +55	9	Natalia, +8
5	Manuel, −7	10	Paula, −6

Orden del que menos tiene al que más tiene: María < José Manuel < Ángela < Pedro < Manuel < Paula < Nuria < Natalia < Álvaro < Javier.

Anotaciones

Sumas y restas de números enteros

Observa cómo se suman y se restan números enteros con el caso de Silvia, y ayuda a Edu a calcular el dinero que tiene.

SILVIA NO TIENE DINERO			EDU TIENE 4 €		
Le dan	36 €	0 + 36 = 36 €	Le dan	46 €	…
Se gasta	15 €	36 − 15 = 21 €	Se gasta	100 €	…
Se gasta	30 €	21 − 30 = −9 €	Se gasta	50 €	…
Le rebajan	5 €	−9 − (−5) = −4 €	Le rebajan	30 €	…
Saca del cajero	20 €	−4 + 20 = 16 €	Saca del cajero	100 €	…
Tiene 16 €.			Tiene …		

1 Copia y completa las sumas y restas con enteros en todos los casos posibles.

a) **+ y +**

El ascensor está en la 4.ª planta y sube 5 plantas.	4.ª + 5 = 9.ª
Paula tiene 25 € y le dan 50 €.	…
Antonio tiene 15 cromos y gana 6.	…

b) **+ y −**

El ascensor está en la 4.ª planta y baja 3 plantas.	4.ª − 3 = 1.ª
José Antonio tiene 25 € y gasta 30 €.	…
Gema tiene 15 cromos y pierde 6.	…

c) **− y +**

El ascensor está en el 2.º sótano y sube 4 plantas.	−2.ª + 4 = 2.ª
Carlos debe 20 € y paga con 50 €.	…
Javier ha perdido 5 cromos y ahora gana 7.	…

María debe 7 cromos y Virginia le perdona 2.	−7 − (−2) = −5
Ángela debe en la tienda 20 € y le rebajan 2 €.	…
Álvaro ha perdido 15 cromos y su hermano le perdona 3.	…

d) **− y −**

El ascensor está en el 1.er sótano y baja 2 plantas.	−1 − 2 = −3
José Carlos debe 12 € y le prestan 2 € más.	…
Mi equipo lleva 6 goles en contra y hoy le han marcado 2.	…

Págs. 58 y 59 Sugerencias metodológicas

Las páginas 58 y 59 se dedican a la suma y a la resta de números enteros. Se comienza con un ejercicio en el que se soluciona un problema tipo paso a paso, y al lado, en paralelo, los niños y las niñas han de resolver otro de las mismas características siguiendo la pauta expresada en el anterior. Desde el principio se juega con verbos que se pueden asociar fácilmente a las operaciones de sumar y restar.

El caso de Edu, siguiendo los pasos que se pusieron como modelo con Silvia, tiene la siguiente solución:

Tiene 4 € y le dan 46 €: tiene 50 €.

Se gasta 100 €: 50 € − 100 € = (−50 €).

Se gasta 50 €: (−50 €) + (−50 €) = (−100 €).

Le rebajan 30 €: −100 € − (−30 €) = (−70 €).

Saca del cajero 100 € y paga: −70 € + 100 € = 30 €. Luego, Edu tiene 30 €.

Ejercicio 1. Plantea sumas y restas, pero tipificadas en función de todas las posibles combinaciones de signos: + y +; + y −; − y +; − y −. En cada ejercicio hay tres actividades (salvo en la letra c), que es más complicada y hay seis), de las cuales la primera viene resuelta para que sirva de ejemplo. Excepto en un caso, la situación se repite, variando únicamente los datos. Se hace con el fin de que los alumnos y las alumnas puedan discriminar con más facilidad los tipos de operaciones y la solución que se alcanza.

Soluciones

1. a) 25 + 50 = 75 € 15 + 6 = 21 cromos.

b) 25 − 30 = −5 € 15 − 6 = 9 cromos.

2 Empareja en tu cuaderno.

1. Debo 30 € y me perdonan 12 €	a) $-30-(-12)=-18$
2. Debo 30 € y pago 12 €	b) $30+12=42$
3. Tengo 30 € y me gasto 12 €	c) $-30+12=-18$
4. Tengo 30 y me dan 12 €	d) $30-12=18$

3 Esta tabla recoge la clasificación final de una liga de fútbol de los cuatro primeros y de los cuatro últimos equipos.

a) Averigua la diferencia de goles (a favor y en contra) de cada uno de esos ocho equipos.

b) ¿Cómo sería la clasificación si en lugar de por puntos se hiciese por la diferencia de goles?

(PJ: partidos jugados/ PG: partidos ganados/ PE: partidos empatados/ PP: partidos perdidos/ GF: goles a favor/ GC: goles en contra/Ptos.: Puntos)

EQUIPO	PJ	PG	PE	PP	GF	GC	PTOS.
1. At. Golazo	38	28	6	4	77	26	90
2. Real Penalti	38	27	6	5	100	33	87
3. FC Balompié	38	27	6	5	104	38	87
4. Real Competición	38	20	10	8	66	39	70
17. FC Entretenidos	38	11	7	20	43	71	40
18. At. Regateo	38	10	9	19	32	62	39
19. Fuera de juego FC	38	7	15	16	38	86	36
20. At. Campeones	38	6	7	25	36	78	25

4 El siguiente cuadro recoge las temperaturas máximas y mínimas de cinco ciudades españolas.

CIUDAD	MÁXIMA	MÍNIMA	DIFERENCIA
Granada	16 °C	−1 °C	17 °C
Barcelona	18 °C	9 °C	…
Córdoba	20 °C	8 °C	…
Madrid	7 °C	0 °C	…
Valladolid	6 °C	−3 °C	…

a) Copia el cuadro y halla la diferencia en grados de cada ciudad.

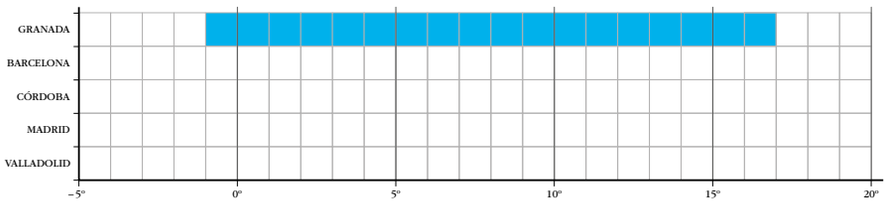
b) Ordena estas ciudades siguiendo estos tres criterios:

1.º Por la temperatura mínima más alta.

2.º Por la temperatura máxima más baja.

3.º Por mayor diferencia de temperaturas.

c) Representa en tu cuaderno una recta numérica con los intervalos de temperaturas de cada ciudad. Observa el ejemplo con Granada.



Anotaciones

c) $-20+50=30$ € $\quad -5+7=2$ cromos.

$-20+2=-18$ € $\quad -15-(-3)=-12$ cromos.

d) $-12+-2=-14$ € $\quad -6+-2=-8$ goles.

2. 1-a); 2-c); 3-d); 4-b).

3. a) At. Golazo, 51; Real Penalti, 67; F.C. Balompié, 66; Real Competición, 27; F.C. Entretenidos, −28; At. Regateo, −30; Fuera de juego F.C., −48; At. Campeones, −42.

b) 1.º Real Penalti, 2.º F.C. Balompié, 3.º At. Golazo, 4.º Real Competición; Entretenidos, 18.º At. Regateo, 19.º At. Campeones, 20.º Fuera de juego F.C.

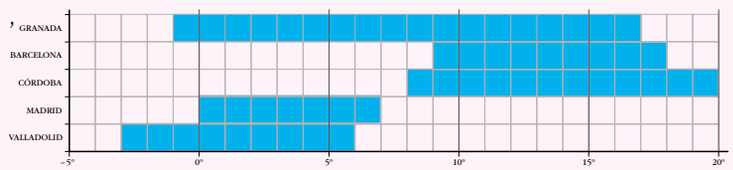
4. a)

CIUDAD	MÁXIMA	MÍNIMA	DIFERENCIA
Granada	16°	−1°	17°
Barcelona	18°	9°	9°
Córdoba	20°	8°	12°
Madrid	7°	0°	7°
Valladolid	6°	−3°	9°

b) 1.º Barcelona, Córdoba, Madrid, Granada, Valladolid.

2.º Valladolid, Madrid, Granada, Barcelona, Córdoba.

3.º Granada, Córdoba, Barcelona y Valladolid, Madrid.



Anotaciones

Producto de enteros

Observa las siguientes situaciones:

- Si te dan ocho veces ocho euros, es como si te dan 64 €: $(+8) \times (+8) = 64$
- Si tienes deudas de ocho euros ocho veces, es como deber 64 € (−64 €): $(-8) \times 8 = -64$
- Si ocho veces te gastas ocho euros, es como gastar 64 € (−64 €): $8 \times (-8) = -64$
- Si te quitan una deuda de ocho euros ocho veces, es lo mismo que quedarte con 64 euros que ya no debes: $(-8) \times (-8) = 64$

Posiblemente te cueste entender el último caso, pero imagina que hubieras tenido que pagar esos 64 €: ahora no los tendrías. Sé positivo y piensa al revés: que si no tienes que pagar esos 64 €, siguen siendo tuyos.

Estos casos se simplifican en la regla de los signos:

$(+) \times (+) = (+)$ $(+) \times (-) = (-)$ $(-) \times (+) = (-)$ $(-) \times (-) = (+)$

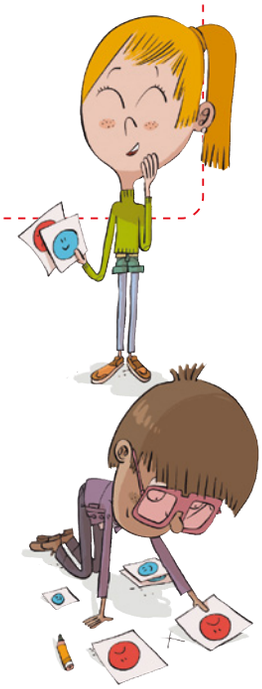
Para que sea más fácil de recordar, piensa en los personajes de una película y que:
+ sea **un amigo** y − **un enemigo**.

El amigo de mi amigo es mi amigo. $(+) \times (+) = (+)$

El amigo de mi enemigo es mi enemigo. $(+) \times (-) = (-)$

El enemigo de mi amigo es mi enemigo. $(-) \times (+) = (-)$

El enemigo de mi enemigo es mi amigo. $(-) \times (-) = (+)$



1 Teniendo en cuenta la regla de los signos, haz los siguientes productos.

a) $5 \times (-7)$ d) $-3 \times (-6)$ g) $-9 \times (+4)$

b) $2 \times (-6)$ e) $-7 \times (-2)$ h) -8×12

c) $-12 \times (-5)$ f) $6 \times (-15)$ i) -23×4

2 ¿Qué puede pasar si tenemos tres productos? Observa el ejemplo y deduce los demás.

a) $5 \times (-7) \times (-2) = -35 \times (-2) = 70$

b) $3 \times (-8) \times 4$

c) $-5 \times 9 \times (-2)$

d) $4 \times (-2) \times 3$

Pág. 60 Sugerencias metodológicas

La página se dedica a explicar el porqué de la regla de los signos que, normalmente, se suele aprender de memoria.

Multiplicando. El signo que aparezca indica si la cantidad se tiene (+) o se debe (−). Son términos que entienden bien.

Multiplicador. El signo indica si se «pone» (+) o si se «quita» (−). La cantidad que sigue al signo es el número de veces que se pone o se quita. De la combinación de los dos signos en cada factor salen los cuatro tipos de producto:

(+) × (+). Tienes dinero y lo pones o multiplicas un número determinado de veces. El resultado es +.

(+) × (−). Tienes dinero, pero te detraen o quitan lo que tienes un número determinado de veces. El resultado es −, naturalmente.

(−) × (+). Tienes una deuda, y te la aumentan un número determinado de veces. Tienes menos, y ese es el signo del resultado.

(−) × (−). Tienes una deuda, y te la quitan cierto número de veces. Tienes más dinero, y el producto lleva el signo +.

Además del modelo de los amigos y los enemigos, se puede emplear otro ligado a la lógica y al lenguaje. En este, las afirmaciones se consideran con el signo +, y las negaciones con el signo −. De las combinaciones, sale el sentido de la frase.

OPERACIÓN	FRASE	DIFERENCIA
(+) × (+)	SÍ quiero que SÍ comas.	Comes. Afirmación: +
(+) × (−)	SÍ quiero que NO comas.	No comes. Negación: −
(−) × (+)	NO quiero que SÍ comas.	No comes. Negación: −
(−) × (−)	NO quiero que NO comas.	Comes. Afirmación: +

Soluciones

1. a) −35; b) +18; c) −36; d) −12; e) +14; f) −96; g) +60; h) −90; i) −92

2. b) −96; c) +90; d) −24

División de enteros

Como la división es la operación inversa del producto, las reglas de los signos que aplicamos en el producto se aplican también en la división. Para hallar el cociente exacto de dos números enteros, se dividen sus valores absolutos y se pone el signo según la regla.

$(+) : (+) = (+)$ $(+) : (-) = (-)$ $(-) : (+) = (-)$ $(-) : (-) = (+)$

1 Calcula.

a) $40 : 2 = +20$ o 20
b) $-50 : (-5)$
c) $81 : (-9)$
d) $49 : (-7)$
e) $-80 : (-5)$
f) $-42 : 3$
g) $56 : (-7)$
h) $(-70) : (-10)$
i) $96 : (-6)$
j) $60 : (-5)$
k) $-64 : (-8)$
l) $-72 : 3$

2 Calcula teniendo en cuenta la regla de los signos. Observa el ejemplo.

a) $120 : (-4) \times 60 = -30 \times 60 = -1\,800$
b) $-216 : (-6) : (+3)$
c) $-81 : (-3) \times 5$
d) $-63 : (-7) : 3$
e) $-45 \times (-2) : 9$
f) $-72 : (-9) \times (-7)$
g) $-12 \times 6 : (-4)$
h) $110 : (-5) \times 3$
i) $-9 \times 6 \times 3$
j) $-8 \times (-9) : (-4)$

3 Completa esta tabla en tu cuaderno, buscando el número que falta.

SUMA	RESTA	MULTIPLICACIÓN	DIVISIÓN
$3 + \ldots = -18$	$-9 - \ldots = 1$	$6 \times \ldots = -18$	$-9 : \ldots = -3$
$-4 + \ldots = 1$	$6 - \ldots = 8$	$5 \times \ldots = 30$	$12 : \ldots = 3$
$-3 + \ldots = 4$	$9 - \ldots = 2$	$7 \times \ldots = -42$	$15 : \ldots = -3$
$-11 + \ldots = 6$	$5 - \ldots = 9$	$-8 \times \ldots = 72$	$-20 : \ldots = -5$
$9 + \ldots = 4$	$-4 - \ldots = -7$	$-5 \times \ldots = -35$	$-20 : \ldots = 10$
$5 + \ldots = 12$	$-2 - \ldots = 4$	$4 \times \ldots = 28$	$40 : \ldots = 8$
$6 + \ldots = -4$	$-5 - \ldots = -8$	$-3 \times \ldots = -21$	$-36 : \ldots = 9$
$-8 + \ldots = 6$	$7 - \ldots = 1$	$-5 \times \ldots = 40$	$28 : \ldots = -7$

Anotaciones

Pág. 61 Sugerencias metodológicas

La regla de los signos es de idéntica aplicación a la división. Por ejemplo, para hallar el dividendo hay que multiplicar el cociente por el divisor. Ahí entra en juego la regla de los signos. Si al buscar el cociente busco el número que multiplicado por el divisor dé el dividendo o la cantidad más aproximada a él, necesariamente he de seguir las mismas reglas de signos que en la multiplicación.

Soluciones

1. b) 10 d) −7 f) −14 h) 7 j) −12 l) −24
c) −9 e) 16 g) −8 i) −16 k) 8

2. b) 12 d) 3 f) −56 h) −66 j) −18
c) 135 e) 10 g) 18 i) −162

3.

SUMA	RESTA	MULTIPLICACIÓN	DIVISIÓN
$3 + \mathbf{(-21)} = -18$	$-9 - \mathbf{(-10)} = 1$	$6 \times \mathbf{(-3)} = -18$	$-9 : \mathbf{3} = -3$
$-4 + \mathbf{5} = 1$	$6 - \mathbf{(-2)} = 8$	$5 \times \mathbf{6} = 30$	$12 : \mathbf{4} = 3$
$-3 + \mathbf{7} = 4$	$9 - \mathbf{7} = 2$	$7 \times \mathbf{(-6)} = -42$	$15 : \mathbf{(-5)} = -3$
$-11 + \mathbf{17} = 6$	$5 - \mathbf{(-4)} = 9$	$-8 \times \mathbf{(-9)} = 72$	$-20 : \mathbf{4} = -5$
$9 + \mathbf{(-5)} = 4$	$-4 - \mathbf{3} = -7$	$-5 \times \mathbf{7} = -35$	$-20 : \mathbf{(-2)} = 10$
$5 + \mathbf{7} = 12$	$-2 - \mathbf{(-6)} = 4$	$4 \times \mathbf{7} = 28$	$40 : \mathbf{5} = 8$
$6 + \mathbf{(-10)} = -4$	$-5 - \mathbf{3} = -8$	$-3 \times \mathbf{7} = -21$	$-36 : \mathbf{(-4)} = 9$
$-8 + \mathbf{14} = 6$	$7 - \mathbf{(-8)} = 1$	$-5 \times \mathbf{(-8)} = 40$	$28 : \mathbf{(-4)} = -7$

Anotaciones

Operaciones con números enteros

Imagina un centro comercial y vamos a reflejar, mediante una operación, varias subidas y bajadas en el ascensor. Observa el ejemplo paso a paso:

1. Antonio aparca su coche en el tercer sótano de un gran centro comercial. Como está bajo el nivel del suelo → −3.
2. Sube al taller que se encuentra en el 1.er sótano, dos plantas más arriba. → →(−3) + (+2) = −1
3. Sube 6 plantas para ver ordenadores. → (−3) + (+2) + (+6) = +5
4. Baja 2 plantas para comprar un pijama. → (−3) + (+2) + (+6) + (−2) = +3
5. Baja 6 plantas al 3.er sótano, para meter la compra en el coche. → → (−3) + (+2) + (+6) + (−2) + (−6) = −3

Hemos ido sumando todos los pasos del proceso. Hemos reflejado con el signo + las subidas y con el signo − las bajadas.

Para que lo entiendas mejor, hemos reflejado los signos. Pero podemos simplificar:

- Las sumas de enteros positivos: es lo mismo + (+5) que + 5 o que 5.

  (+5) + (+2) = 5 + 2 = 7

- Si el entero es negativo (−5) y está al comienzo, podemos poner −5:

  (−5) + 1 = −5 + 1 = −4

1 Calcula y escribe en tu cuaderno la operación que corresponde a estos problemas. Puedes ayudarte de la recta numérica.

a) Estás en el sótano 1, bajas 2, subes 5, desciendes 3 y asciendes 8.

b) Debes 6 €, te prestan 2 €, pagas 4 €, te gastas 5 € y ganas 7 €.

c) En una máquina del tiempo sales de este año, viajas al futuro 5 años, regresas al pasado 6 años y te vuelves a adelantar en el tiempo 8 años.

d) Estás pintando una pared subido al 5.º peldaño de una escalera, subes 6 peldaños, bajas 2, bajas otros 2, subes 3 y bajas 10.

2 Simplifica las operaciones que has realizado en el ejercicio anterior.

Pág. 62 Sugerencias metodológicas

En las dos páginas anteriores se han tratado todas las combinaciones posibles de signos. En la presente, se combinan varias acciones con sus correspondientes signos. Sería, por así decirlo, la generalización de los casos individuales a situaciones encadenadas. Por eso, la página se abre con un ejemplo, en el que se van encadenando las situaciones de alternancia de signos: se parte de un número determinado (sótano tres, o sea, −3) y se va subiendo y bajando en función de lo que se necesita ver o comprar. Al final se ha trabajado la operación (simplificando los signos): −3 + 2 + 6 + (−2) + (−5), cuya solución es −3.

Ejercicio 1. Propone cuatro actividades. La primera es de la misma índole que la mostrada en el ejemplo, y en las tres restantes, se cambia el «paisaje».

Soluciones

1. a) Llegas a la planta 7.

b) Debes 10 €.

c) Partiendo de 2017, llegas al año 2024.

d) Estás en el suelo.

2. a) −1 + −2 + 5 + −3 + 8 = 7

b) −6 + −2 + −4 + −5 + 7 = −10

c) Por ejemplo: 2017 + 5 + −6 + 8 = 2 024.

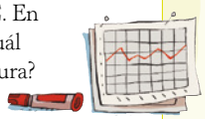
d) 5 + 6 + −2 + −2 + 3 + −10 = 0

Problemas con números enteros

Resuelvo problemas

1. Un ascensor está en la planta 7.ª. Sube cuatro plantas y, después, baja 9. ¿A qué planta llega?

2. El termómetro marca 23 °C. La temperatura va a subir 6 °C durante el día, y va a bajar 12 °C por la noche. ¿Qué temperatura marcará por la noche?



3. En Villaparda la temperatura máxima ha sido de 31 °C, y la mínima, de 12 °C. En Aldeafría la temperatura máxima ha sido de 5 °C, y la mínima, de −5 °C. ¿Cuál ha sido la variación térmica a lo largo del día? ¿Dónde oscila más la temperatura?

4. ¿Cuántos años hay de diferencia entre el 300 a. C. y el 150 d. C.?

5. Un buzo se encuentra en la cubierta de un barco, a 5 m sobre el nivel del mar. Baja 15 m y hace una parada de seguridad. Baja otros 10 m y recoge unas muestras del fondo marino. Sube luego 11 m y se detiene al cruzarse con un banco de peces. ¿A qué distancia se encuentra ahora del nivel del mar?

6. Una empresa tiene un saldo (diferencia entre ingresos y gastos) de 1 234 €. Paga una deuda de 2 768 € y recibe unos ingresos de 2 164 €. ¿Cuál es ahora su saldo?

7. Doña Manuela tiene un saldo en el banco de −250 €. Ingresa una cantidad de dinero y el saldo pasa a ser de +225 €. ¿Cuánto dinero ha ingresado?

Invento, creo y razono

8. Inventa una situación problemática para la siguiente expresión matemática.

$(-3) + (+5) + (-4)$

Anotaciones

Pág. 63 Sugerencias metodológicas

A lo largo de esta página se presentan diferentes situaciones problemáticas que pueden ser modelizadas con números enteros. Se pretende que el alumnado se familiarice con su uso cotidiano y perciba en qué situaciones son útiles.

Siempre que sea posible será recomendable que el alumnado intente expresar cómo resolver el problema con operaciones combinadas de números enteros.

Los ejercicios 1, 2 y 5 son sencillos y pueden ser resueltos mentalmente ya que se emplean números de una y dos cifras.

Los ejercicios 3 y 4 son problemas de comprensión del concepto. Sencillos si se ha entendido lo que son los números enteros. No es necesario que escriban las operaciones, se pretende que se halle la diferencia o distancia entre un número positivo y uno negativo.

El ejercicio 6 es algo más complejo porque los cálculos a realizar son con números de 4 cifras.

El ejercicio 7 es el más difícil de todos. Se trata de una suma en la que se conoce un sumando y el resultado final, y hay que hallar el otro sumando. $-250 + ¿? = 225$.

Para terminar, en el apartado Invento, creo y razono se plantea una expresión matemática con operaciones combinadas con números enteros y se pretende que, por equipos, el alumnado intente plantear una situación problemática que se resuelva con dicha expresión. Se recomienda realizar algún ejemplo previamente con el grupo/clase.

Soluciones

1. $(7 + 4 - 9) = 2$
Llega a la segunda planta.

2. $(+23) + (+6) + (-12) = 17$
Por la noche marcará 17 °C.

3. Oscila más en Villaparda, 19 °C, frente a 10 °C en Aldeafría.

4. Hay 450 años de diferencia.

5. $(+5) + (-15) + (-10) + (+11) = -9$
Nueve metros por debajo del nivel del mar.

6. $(1\,234 - 2\,768 + 2\,164) = 630$
Su saldo es ahora de 630 €.

7. $(+225) - (-250) = 475$
Ha ingresado 475 €.

8. Respuesta abierta.

Anotaciones

RESUELVO PROBLEMAS

Construimos la categoría de doble inclusión I

Observo

Construimos los tres problemas de la categoría de doble inclusión seleccionando los datos necesarios en cada caso.

ESTRUCTURAS A-A

Lucía ha metido esta temporada 20 goles.	Hugo ha metido 5 goles más que Lucía.	Entre los dos han metido 45 goles.

1 Preguntando por los goles conseguidos en total.

Lucía ha metido esta temporada 20 goles. Si Hugo ha metido 5 goles más que Lucía, ¿cuánto goles han metido entre los dos?

2 Preguntando por la diferencia de goles.

Entre Lucía y Hugo han metido 45 goles esta temporada. Si Lucía ha metido 20 goles, ¿cuántos goles más ha metido Hugo que Lucía?

3 Preguntando por los goles que ha metido cada uno.

Entre Lucía y Hugo han metido 45 goles esta temporada. Si Hugo ha metido 5 más que Lucía, ¿cuántos goles ha metido cada uno?

Invento, creo y razono

1 Construye los tres problemas de doble inclusión seleccionando los datos que necesites para cada problema. Luego, resuélvelos.

María ha anotado 15 puntos en el partido de vóley.	Andrés ha anotado 6 puntos menos que María.	Entre los dos han anotado 24 puntos.

Problema 1. Pregunta por los puntos anotados en total.

Problema 2. Pregunta por la diferencia de puntos.

Problema 3. Pregunta por los puntos anotados por cada uno.

64

Pág. 64 Sugerencias metodológicas

En esta página se propone una tarea centrada en la construcción de enunciados. Hasta ahora se han trabajado de forma sistemática todos los problemas que forman parte de la categoría de doble inclusión. Es posible que dentro del grupo/clase haya alumnos que aún no sepan resolver algunos de estos problemas. Es más, puede ser que confundan unos con otros y apliquen métodos de resolución equivocados.

Esta actividad pretende ayudar al alumnado a encajar todas las piezas del puzle, viendo de forma global cómo se construyen todos los problemas de la categoría (y de la estructura) y cómo se resolvería cada uno de ellos.

Se recomienda realizar un ejemplo como el que se muestra en el encabezado con todo el grupo clase y posteriormente resolver por equipos el ejercicio 1. Es importante que a medida que construyan cada problema lo vayan resolviendo. Esto les ayudará a diferenciar los procesos de resolución que tiene cada situación con respecto a las otras dos.

Soluciones

1. a) María ha anotado 15 puntos en el partido de vóley de hoy. Si Andrés ha anotado 6 puntos menos que María, ¿cuántos puntos han anotado entre los dos?
$15 - 6 = 9$ $9 + 15 = 24$ puntos en total.

b) Entre María y Andrés han anotado 24 puntos en el partido de vóley. Si María ha anotado 15, ¿cuántos menos ha anotado Andrés?
$24 - 15 = 9$ puntos $15 - 9 = 6$ puntos menos.

c) Entre María y Andrés han anotado 24 puntos en el partido de vóley de hoy. Si Andrés ha anotado 6 puntos menos que María, ¿cuántos puntos ha anotado cada uno?
$24 - 6 = 18$ $18 : 2 = 9$ puntos/Andrés $9 + 6 = 15$ puntos/María.

Construimos la categoría de doble inclusión II

Observo

Construimos estos tres problemas de la categoría de doble inclusión seleccionando los datos necesarios en cada caso.

ESTRUCTURAS A-M

Patricia ha derribado 9 bolos.	José ha derribado 5 veces más.	Entre los dos han derribado 54 bolos.

1 Preguntando por los bolos derribados en total.

Patricia ha derribado 9 bolos. José ha derribado 5 veces más. ¿Cuántos bolos han derribado entre los dos?

2 Preguntando por las veces.

Entre Patricia y José han derribado 54 bolos. Si Patricia ha derribado 9 bolos, ¿cuántas veces más bolos ha derribado José que Patricia?

3 Preguntando por los bolos que ha derribado cada uno.

Entre Patricia y José han derribado 54 bolos. Si José ha derribado 5 veces más bolos que Patricia. ¿Cuántos bolos ha derribado cada uno?

Invento, creo y razono

1 Construye los tres problemas de doble inclusión seleccionado los datos que necesites para cada problema. Luego, resuélvelos.

Arturo ha realizado 9 lanzamientos a canasta.	Andrea ha realizado 3 veces más lanzamientos que Arturo.	Entre los dos han realizado 36 lanzamientos a canasta.

Problema 1. Pregunta por los lanzamientos realizados en total.

Problema 2. Pregunta por las veces.

Problema 3. Pregunta por los lanzamientos que ha realizado cada uno.

Anotaciones

Pág. 65 Sugerencias metodológicas

Se propone en esta página otra tarea centrada en la construcción de enunciados. Esta actividad pretende ver de forma global cómo se construyen todos los problemas de la categoría de doble inclusión (y de la estructura) y cómo se resolvería cada uno de ellos.

Se recomienda realizar un ejemplo como el que se muestra en el encabezado con todo el grupo clase y posteriormente resolver por equipos el ejercicio 1. Es importante que a medida que construyan cada problema lo vayan resolviendo. Esto les ayudará a diferenciar los procesos de resolución que tiene cada situación con respecto a las otras dos.

Soluciones

1. a) Arturo ha realizado 9 lanzamientos a canasta. Andrea ha realizado 3 veces más lanzamientos. ¿Cuántos lanzamientos han realizado entre los dos?

$9 \times 3 = 27$ $27 + 9 = 36$ lanzamientos en total.

b) Entre Arturo y Andrea han realizado 36 lanzamientos. Si Arturo ha realizado 9 lanzamientos, ¿cuántas veces más lanzamientos ha realizado Andrea que Arturo?

$36 - 9 = 27$ $27 : 9 = 3$ veces más.

c) Entre Arturo y Andrea han realizado 36 lanzamientos. Si Andrea ha realizado 3 veces más lanzamientos que Arturo, ¿cuántos lanzamientos ha realizado cada uno?

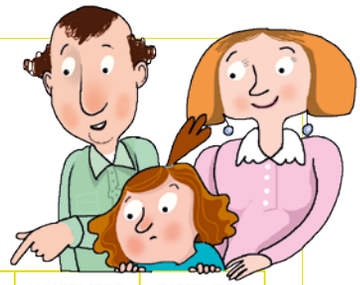
$3 + 1 = 4$ $36 : 4 = 9$ lanzamientos/Arturo

$9 \times 3 = 27$ lanzamientos/Andrea.

Anotaciones

TAREA COMPETENCIAL

Aprendo a controlar mis gastos



Emma tiene 11 años y sus padres llevan tiempo observando que gasta demasiado y muchos meses acaban dándole más dinero. Para que sea consciente de ello y aprenda a hacer un uso responsable de sus recursos económicos, han hecho una simulación de ingresos y gastos con su información financiera en esta tabla.

MES	JULIO	AGOSTO	SEPTIEMBRE	OCTUBRE	NOVIEMBRE	DICIEMBRE
INGRESOS	+50 €	+80 €	+50 €	+60 €	+70 €	+100 €
GASTOS	−75 €	−90 €	−60 €	−80 €	−70 €	…
SALDO	…	…	…	…	…	+ 20 €

A continuación, le plantean una serie de cuestiones para que reflexione y cambie sus hábitos.

1. En primer lugar, teniendo en cuenta los ingresos y los gastos de cada mes, queremos que calcules cuál hubiese sido el saldo hipotético que te hubiese quedado al finalizar cada uno.

2. Una vez obtenidos los saldos, habrás podido comprobar que algunos son negativos. Ordena los saldos de menor a mayor para ver en qué meses el balance fue peor.

3. Llegados a este punto, esperamos que empieces a ser consciente que no es un buen hábito gastar más de lo que se ingresa. Vamos a ponerte a prueba. En este mes de diciembre queremos que tu saldo final sea de +20 €. Teniendo en cuenta que en estas festividades tus abuelos te han dado dinero y tienes 100 €, ¿cuánto te podrás gastar cómo máximo y cómo lo expresaremos en la tabla?

   a) +20 € b) +80 € c) −60 € d) −80 €

4. Con el dinero propuesto como gasto en diciembre, Emma quiere comprarse dos faldas de 25 € cada una, un pantalón de 30 € y tres camisetas de 10 € cada una. Indica cómo calcular cuánto se gastaría y analiza si podría hacerlo.

   a) (25 × 2) + 30 + (10 × 3)

   b) 25 + 2 + 30 + 10 + 3

   c) (25 +10) × 5 + 30

Pág. 66 Sugerencias metodológicas

Las mismas orientaciones metodológicas que la Tarea competencial de la unidad 1.

Soluciones

1.

MES	JULIO	AGOSTO	SEPTIEMBRE	OCTUBRE	NOVIEMBRE	DICIEMBRE
INGRESOS	+50 €	+80 €	+50 €	+60 €	+70 €	+100 €
GASTOS	−75 €	−90 €	−60 €	−80 €	−70 €	…
SALDO	**−25 €**	**−10 €**	**10 €**	**−20 €**	**0 €**	20 €

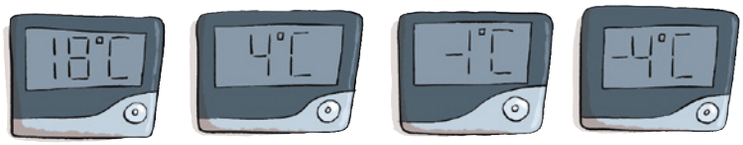
2. Julio, octubre, agosto, noviembre, septiembre y diciembre.

3. Opción d).

4. Opción a). No podría hacerlo porque se gastaría más de 80 €.

REPASO

1 Observa los siguientes termómetros digitales:



a) Representa las temperaturas en una recta numérica.

b) Calcula la variación de temperatura entre −4° y 4°, −4° y −1°, −4° y 18°.

2 Escribe el signo > o < según corresponda entre estas parejas de números.

a) −5 … 5 c) −3 … −2 e) −18 … −20

b) −8 … 0 d) 0 … −6 f) −3 … −5

3 Observa la relación que cumplen estas parejas de números y escribe cuatro parejas de números negativos más que cumplan esa relación.

a) −8 y −5. Relación: −8 es tres unidades menor que −5.

b) −6 y −4

c) −2 y −1

4 Responde en tu cuaderno a las preguntas según las temperaturas del ejercicio 4 de la página 59.

a) ¿Cuánto tiene que bajar la mínima de Granada para ser igual que la mínima de Valladolid?

b) ¿Cuántos grados tiene que subir la máxima de Granada para ser igual que la máxima de Córdoba?

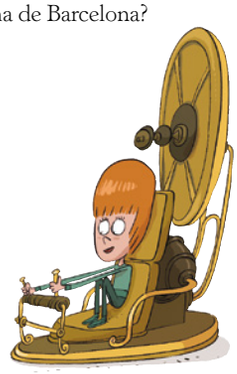
c) ¿Qué debe pasar para que se iguale la máxima de Madrid con la mínima de Barcelona?

5 Escribe y calcula la operación que corresponde a estos problemas. Puedes ayudarte de la recta numérica.

a) Ganas 8 €, gastas 12 €, te descuentan 4 €, pagas 5 € y en un sorteo te tocan 8 €.

b) En una máquina del tiempo viajas al año 2030, quieres ver qué ocurrió 5 años antes, y luego viajas al futuro para ver qué pasó 10 años después.

c) ¿Cuántos años atrás deberás viajar para regresar a nuestro año, si estás en el año que calculaste en el apartado b)?

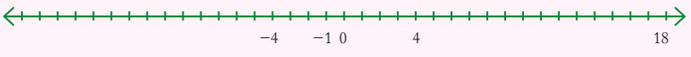


Anotaciones

Pág. 67 Sugerencias metodológicas

La página presenta un repaso de las actividades de la unidad que no requiere mayores explicaciones.

Soluciones

1. a) 

b) 8; 3 y 22

2. a) < c) < e) >

b) < d) > f) >

3. b) −6 es dos unidades menor que −4.

c) −2 es una unidad menor que −1.

Respuesta libre. Por ejemplo: b) −8 y −6; −12 y −10; −16 y −14; −20 y −18

c) −9 y −8; −11 y −10; −21 y −20; −122 y −111

4. a) Tiene que bajar dos grados.

b) Tiene que subir cuatro grados.

c) La máxima de Madrid debe subir once grados.

5. a) 8 − 12 + 4 − 5 = 3. Tienes 3 €.

b) 2030 − 5 + 10 = 2035. Estás en el año 2035.

c) Suponiendo que estemos en el año 2017: 2035 − 18 = 2017. Tendrás que viajar 18 años atrás.

5 EL PRODUCTO Y LA DIVISIÓN

Presentación de la unidad

La primera unidad del segundo trimestre se dedica, salvo en el caso de la resolución de problemas, al producto y la división. En el caso del primero se abordan tres contenidos importantes:

- El trabajo con el producto posicional con decimales.
- El trabajo con los patrones del producto con decimales.
- Las abreviaciones de los productos derivadas de la aplicación de las propiedades de las operaciones de estructura multiplicativa.

En cuanto a la división, se repasa la división por dos cifras en el formato estándar sin decimales y se introduce dicha operación con decimales. Por otra parte, también se establece el formato posicional en la división por dos cifras, graduándola en los siguientes pasos:

- División posicional sin decimales.
- División posicional con decimales en el dividendo.
- División posicional con decimales en el divisor.

Sugerencias metodológicas

En la presente unidad se abordan contenidos que, fundamentalmente, añaden destrezas útiles a las habilidades y conocimientos que ya tienen los estudiantes sobre el producto. Es, por así decirlo, un refinamiento de las técnicas que han empleado hasta ahora. Por ello, pese a que hacemos la habitual división de contenidos en los niveles básico, de suficiencia y de maestría, el hecho de que algunas de estas destrezas no hayan sido adquiridas por los niños y las niñas supone una carencia relativa.

El producto posicional se repasa y se sistematiza. La importancia del mismo viene dada porque supone un ahorro de escritura considerable y que, por tanto, puede requerir de menos números que el producto tradicional. Además, permite la realización de preguntas complejas, favorece el cálculo mental y obliga a practicar la composición de números. Finalmente, y si, por la razón que fuere, el alumno tuviera que aprender el producto en el formato tradicional, es relativamente sencillo abordarlo desde el posicional ABN.

Algo parecido se puede decir de la división posicional por más de una cifra. Formalmente es muy parecida a la tradicional, aunque con más economía de escritura. No se requiere de escala, como en el formato ABN estándar, por lo que se estimula y favorece la estimación de números. Es también sencillo pasar de la división posicional al formato tradicional, con la ventaja de que, en el caso de los decimales en el divisor, no hay que hacer ningún tipo de transformación o búsqueda de una división equivalente que no tenga decimales en el divisor.

Resolución de problemas

Se introduce la resolución de problemas de más de dos operaciones. Se dedican a ello tres páginas: una para el entrenamiento en la búsqueda de las preguntas ocultas, otra en la que ofrecen una serie de pautas para su resolución, y una última en la que se trabajan problemas de doble inclusión y/o comparativos, por la dificultad intrínseca de los mismos. La situación de aprendizaje es la que se origina al tener que organizar un torneo deportivo escolar. Ello conlleva la elaboración de un presupuesto, el coste de material, recaudación por inscripciones, etc.

Educación en valores

En esta unidad se utiliza en varias ocasiones la palabra «truco». Este término implica un procedimiento ingenioso o hábil para conseguir algo. Sin embargo, en el ámbito social está muy extendida la idea de un procedimiento por el cual se logra un objetivo, pero con un menor esfuerzo o en menos tiempo y siempre sin un trabajo o esfuerzo adicional. Por ello, en educación en valores debemos reivindicar el concepto de «truco» como algo ingenioso y no quedarnos simplemente en su utilización. Para ello, es muy importante que el alumnado, en todos los trucos que se presentan, entienda y asimile el proceso a través del cual se llega al truco, aunque finalmente se limite a aplicarlo.

Recursos y materiales recomendados

Para los contenidos de este tema sugerimos el uso y el visionado de los siguientes recursos:

- La máquina de multiplicar por órdenes nos puede servir para trabajar de una manera manipulativa y visual las unidades arbitrarias.
- Composiciones decimales. Recurso muy relevante para ejercitar la composición del número final en el producto posicional.
- Producto posicional I.

- La construcción y la ejercitación de «escalas» para repasar con el alumnado que quizá lo haya olvidado por la falta de uso.
- Para ejemplificaciones de actividades de producto posicional.
- Actividades con el producto y la división posicional graduados en dificultad.

Pensamiento computacional

Esta unidad está centrada en el trabajo del producto y la división con decimales.

Para que los productos de dos cifras con decimales salgan correctamente, el alumnado debe dominar tanto sumas como productos de un dígito por un bidígito.

- Producto:
  - Producto de un decimal por décimas.
    $0{,}6 \times 0{,}7 - 0{,}08 \times 0{,}9 - \ldots$
  - Productos de un dígito por un bidígito con decimales.
    $8 \times 2{,}3 - 9 \times 0{,}54 - \ldots$
  - Extender a decenas y centenas.
    $40 \times 3{,}6 - 70 \times 0{,}45 - 800 \times 6{,}3 - \ldots$
- Suma de cuatro cifras con y sin decimales con rebasamiento.

Para que la división de dos cifras (con o sin decimales) salga correctamente, el alumnado deberá dominar el cálculo de mitades, dobles y restas.

- Mitades: el dominio de las mitades (con y sin decimales) es esencial para la elaboración de las escalas.
  - Fomentar el uso de la descomposición como medio para hallar las mitades correspondientes.
- Dobles: cálculo de dobles con números de tres o cuatro cifras con o sin decimales.
  - Fomentar el uso de las siguientes estrategias: por descomposición, sumando o multiplicando por dos.
- Resta: de tres y cuatro cifras con y sin decimales con rebasamiento.

Esquema

El producto y la división

Operaciones

- Productos posicionales con decimales.
- Patrones en el producto con decimales.
- Abreviaciones para el cálculo mental en el producto. Derivados de la propiedad asociativa.
- Abreviaciones para el cálculo mental en el producto. Derivados de la propiedad conmutativa.
- División por dos cifras con escala. Formato estándar.
- División por dos cifras en formato posicional. Sin escala.
- División por dos cifras en formato posicional. Con decimales.

Problemas

- Problemas de más de dos operaciones. Niveles I, II y III.
- Tarea competencial. Organización del torneo escolar.

Pág. 72 **Sugerencias metodológicas**

En estas páginas se trabaja el producto posicional en los tres casos en los que se pueden presentar los decimales en los factores: en el multiplicando, en el multiplicador, y, por último, en ambos.

Primer ejemplo. No plantea ninguna dificultad nueva. Se multiplica ese orden de magnitud y con los órdenes resultantes se compone el producto o resultado.

Segundo ejemplo. El multiplicador lleva parte decimal. Sí que hay algo más de dificultad cuando el multiplicador lleva parte decimal. El ejemplo que aparece en la página es muy explícito al respecto: se debe conocer qué orden de magnitud se obtiene cuando se multiplica la parte decimal por la entera, y se debe saber componer el producto resultante.

– En el primer caso, como se vio en la primara página de la unidad, el producto por décimas hace «bajar» un orden de magnitud, y por centésimas lo hace «bajar» en dos órdenes de magnitud. Así, al multiplicar 0,06 por 4 centenas, se obtienen 0,24 centésimas… de centena, que es lo que se escribe en su celda. Y así en los demás órdenes de magnitud.

– En el segundo caso, la composición del número exige conocer las equivalencias de la parte decimal de los diferentes órdenes de magnitud respecto a los órdenes de magnitud inferiores. En el caso del ejemplo, tendríamos:

	C	D	U
4 C × 0,06 = 0,24 C	0	2	4
2 D × 0,06 = 0,12 D		0	1,2
8 U × 0,06 = 0,48 U			0,48
		2	5,68
Resultado	25,68		

Tercer ejemplo. Mientras se multiplica la parte decimal por la parte entera del multiplicando no aparece nada nuevo respecto al caso anterior. Sí sucede cuando se multiplica la parte decimal y se origina un orden de magnitud que no está o no aparece en el multiplicando. En el ejemplo del libro se sigue el mismo esquema de presentación del ejemplo anterior. Pero puede servir de ayuda para los niños y las niñas con mayores dificultades si se emplea este formato más explícito y desarrollado:

	D	U	d	
2 D × 2,3 = 4,6 D	4	6		
8 U × 2,3 = 18,4 U	1	8	4	
4 d × 2,3 = 9,2 d				
Resultado				

Hasta aquí se ha desarrollado el producto sin mayores complicaciones. Ahora sí se presentan al obtener en el producto de décimas un número que a su vez lleva décimas: 9,2. La alternativa puede ser la que se arbitra en la tabla que sigue:

EL PRODUCTO Y LA DIVISIÓN

Producto posicional con décimas en el multiplicador

Al igual que hemos hecho anteriormente, una vez realizados todos los productos, reagrupamos las cantidades por su orden correspondiente.

	C	D	U
	4	2	8
× 0,6	2,4	1,2	4,8

	C	D	U
	4	2	8
× 0,6	2,4	1,2	4,8
	2	5	6,8

	C	D	U
	4	2	8
× 0,6	2,4	1,2	4,8
	2	5	6,8
		256,8	

Producto posicional con centésimas en el multiplicador

	C	D	U
	4	2	8
× 0,06	0,24	0,12	0,48

	C	D	U
	4	2	8
× 0,06	0,24	0,12	0,48
		2	5,68

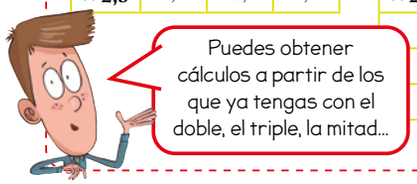
	C	D	U
	4	2	8
× 0,06	0,24	0,12	0,48
		2	5,68
		25,68	

Producto posicional con decimales en el multiplicando y en el multiplicador

	D	U	d
	2	8	, 4
× 2,3	4,6	18,4	9,2

	D	U	d
	2	8	, 4
× 2,3	4,6	18,4	9,2
	5	14	13,2

	D	U	d
	2	8	, 4
× 2,3	4,6	18,4	9,2
	5	14	, 132
	6	5	, 32
		65,32	



1 Calcula el producto posicional con decimales en el multiplicador.

a) 365 × 0,7 b) 2 046 × 0,8 c) 326 × 0,34

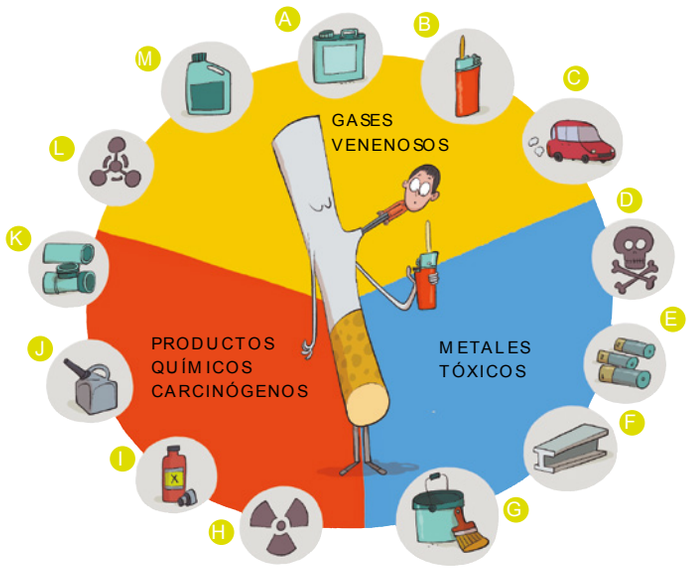
2 Realiza estas multiplicaciones con decimales en el multiplicando y en el multiplicador.

a) 4,59 × 3,7 b) 80,93 × 4,5 c) 700,8 × 0,46

Repaso del producto posicional con decimales en los dos factores

1 Seguro que sabes que el tabaco es perjudicial para la salud. Habrás oído campañas contra el tabaco, pero… ¿sabes por qué es tan malo?

Realiza las siguientes multiplicaciones usando el producto posicional y descubre cuáles son los componentes que hay dentro de un cigarrillo y que lo hacen tan dañino.



a) 28,6 × 9
b) 493,4 × 5
c) 58,4 × 34
d) 63,3 ×4
e) 842 × 0,6
f) 248 × 0,7
g) 7053 × 0,8
h) 455 × 0,34
i) 7603 × 0,03
j) 6,7 × 3,8
k) 40,09 × 3,5
l) 604,8 × 0,6
m) 423,5 × 0,2

¡Cuidado! Quizá te sobre alguna clave.

Claves

25,46 Benceno	173,6 Cromo	362,88 Cianuro de hidrógeno
75,25 Vinagre	228,09 Formaldehído	505,2 Cadmio
84,7 Amoniaco	250 Lejía	1985,6 Monóxido de carbono
140,315 Cloruro de vinilo	253,2 Arsénico	2467 Butano
154,7 Polonio 210	257,4 Tolueno	5642,4 Plomo

Anotaciones

Soluciones

1. a) 255,5 b) 1636,8 c) 110,84

2. a) 16,983 b) 364,185 c) 322,368

Pág. 73 Soluciones

1. a) 257,4 → Tolueno
b) 2467 → Butano
c) 1985,6 → Monóxido de carbono
d) 253,2 → Arsénico
e) 505,2 → Cadmio

	D	U	d	c
2 D × 2,3 = 4,6 D	4	6		
8 U × 2,3 = 18,4 U	1	8	4	
4 d × 2,3 = 9,2 d			9	2
	5	14	13	2
	6	5	3	2
Resultado	65,32			

Las décimas de las décimas son las centésimas, por lo que se crea o se escribe ese nuevo orden de magnitud a la derecha de las décimas, y se concluye la operación del modo que ya se sabe. Se ha empleado el código de colores para una mejor identificación del origen del total de los órdenes de magnitud.

f) 173,6 → Cromo
g) 5642,4 → Plomo
h) 154,7 → Polonio 210
i) 228,09 → Formaldehído
j) 25,46 → Benceno
k) 140,315 → Cloruro de vinilo
l) 362,88 → Cianuro de hidrógeno
m) 84,7 → Amoniaco

Resultados sin operación:
75,25 → Vinagre 250 → Lejía

Anotaciones

Patrones del producto con decimales

Cuando multiplicamos una cantidad por décimas, se hace diez veces más pequeña que si la multiplicamos por unidades. Observa estos productos:

PRODUCTO DE 900 × ... UNIDADES	PRODUCTO DE 900 × ... DÉCIMAS
900 × 1 = 900	900 × 0,1 = 90
900 × 2 = 1 800	900 × 0,2 = 180
900 × 3 = 2 700	900 × 0,3 = 270
900 × 12 = 10 800	900 × 1,2 = 1 080
900 × 32 = 28 800	900 × 3,2 = 2 880

Si el producto es por centésimas, el resultado será cien veces menor, y si es por milésimas, será mil veces más pequeño que por unidades.

PRODUCTO DE 900 × ... UNIDADES	PRODUCTO DE 900 × ... CENTÉSIMAS	PRODUCTO DE 900 × ... MILÉSIMAS
900 × 1 = 900	900 × 0,01 = 9	900 × 0,001 = 0,9
900 × 2 = 1 800	900 × 0,02 = 18	900 × 0,002 = 1,8
900 × 3 = 2 700	900 × 0,03 = 27	900 × 0,003 = 2,7
900 × 12 = 10 800	900 × 0,12 = 108	900 × 0,012 = 10,8
900 × 32 = 28 800	900 × 0,32 = 288	900 × 0,032 = 28,8

Cuando multiplicamos decimales, se produce la misma relación en los resultados. Observa los ejemplos:

PRODUCTO DE 0,9 × ... UNIDADES	PRODUCTO DE 0,9 × ... DÉCIMAS	PRODUCTO DE 0,9 × ... CENTÉSIMAS	PRODUCTO DE 0,9 × ... MILÉSIMAS
0,9 × 1 = 0,9	0,9 × 0,1 = 0,09	0,9 × 0,01 = 0,009	0,9 × 0,001 = 0,000 9
0,9 × 2 = 1,8	0,9 × 0,2 = 0,18	0,9 × 0,02 = 0,018	0,9 × 0,002 = 0,001 8
0,9 × 3 = 2,7	0,9 × 0,3 = 0,27	0,9 × 0,03 = 0,027	0,9 × 0,003 = 0,002 7
0,9 × 12 = 10,8	0,9 × 1,2 = 1,08	0,9 × 0,12 = 0,108	0,9 × 0,012 = 0,010 8
0,9 × 32 = 28,8	0,9 × 3,2 = 2,88	0,9 × 0,32 = 0,288	0,9 × 0,032 = 0,028 8

1 Completa en tu cuaderno la tabla de estos productos con decimales.

3 × 0,3 = 0,9	5 × 0,5 = …	4 × 0,2 = …	0,02 × 0,02 = …	0,8 × 0,6 = …
0,3 × 0,3 = 0,09	0,5 × 0,5 = …	0,4 × 0,2 = …	0,2 × 0,2 = …	0,05 × 0,4 = …
0,03 × 0,3 = 0,009	0,05 × 0,5 = …	0,04 × 0,2 = …	2 × 0,2 = …	0,07 × 0,09 = …
0,03 × 0,03 = 0,000 9	0,05 × 0,05 = …	0,04 × 0,02 = …	0,02 × 0,2 = …	4 × 0,3 = …

Pág. 74 Sugerencias metodológicas

Se abre la unidad con el repaso de los patrones del producto, que recogen el efecto de los factores decimales. Hay tres ejemplos que reflejan la casuística más importante, y que el docente debe repasar con los estudiantes.

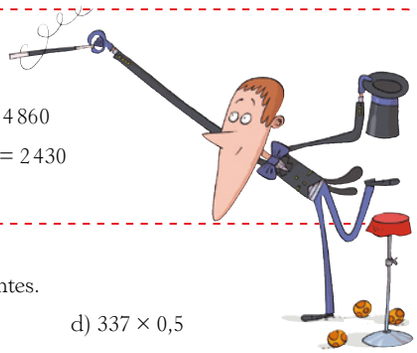
Soluciones

1.

2,5	0,8	0,000 4	0,48
0,25	0,08	0,04	0,02
0,025	0,008	0,4	0,006 3
0,002 5	0,000 8	0,004	1,2

Abreviaciones para el cálculo mental en el producto

Truco 1: Multiplicar por 5 → 486 × 5



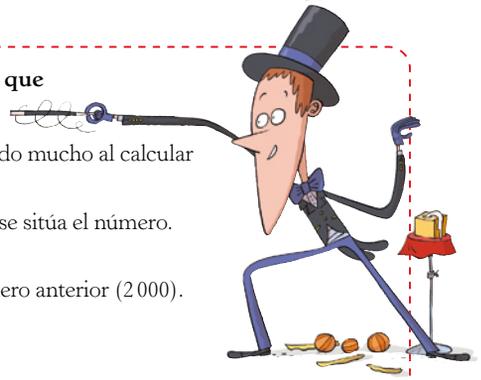
1. El multiplicando se multiplica por 10. 486 × 10 = 4 860
2. Se halla la mitad del producto obtenido. 4 860 : 2 = 2 430

   El producto buscado es 2 430.

1 Aplica esto truco para resolver los productos siguientes.

a) 1 224 × 5 b) 337 × 5 c) 337 × 50 d) 337 × 0,5

Truco 2: El cuadrado de un número de dos cifras que acabe en 5 → 45^2

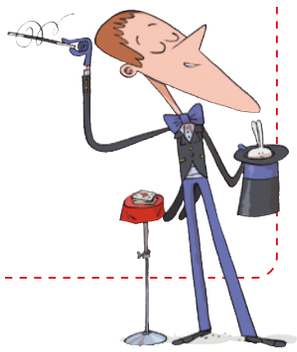


Este caso ya lo conoces muy bien, pues lo has practicado mucho al calcular los cuadrados de semidecenas.

1. Se multiplican las decenas completas entre las que se sitúa el número. 45 está entre 40 y 50. Por tanto: 40 × 50 = 2 000.
2. Se halla el cuadrado de 5 (25), que se añade al número anterior (2 000).

   El resultado es: 45^2 = 2 025

Truco 3: Producto de dos números de dos cifras con la misma decena y cuyas unidades sumen 10 → 44 × 46



Se obtiene un producto de cuatro cifras.

1. Se multiplican las decenas completas entre las que se sitúan los números. 45 y 46 están entre 40 y 50. Por tanto: 40 × 50 = 2 000.
2. Se multiplican las unidades de ambos números (4 × 6 = 24) y su resultado se suma al anterior (2 000).

   El resultado es: 44 × 46 = 2 024

2 Aplica estos últimos trucos para resolver los siguientes productos.

a) 55^2 d) 65^2 g) 3,1 × 3,9

b) $5{,}5^2$ e) $0{,}55^2$ h) 91 × 11

c) 31 × 39 f) 84 × 86 i) 31 × 0,39

Anotaciones

Pág. 75 Sugerencias metodológicas

Los «trucos mágicos» están basados en las propiedades asociativa y distributiva del producto respecto a la suma, y facilitan el cálculo mental de muchas operaciones. Son susceptibles de aplicarles patrones que extiendan su virtualidad, de manera que la averiguación de uno de los productos permita establecer otros muchos. Pero también tienen límites, que conviene explicar.

Truco 1. En principio, los límites van a radicar en la capacidad de hallar mentalmente la mitad de cualquier número por parte de los escolares. Habrá productos de no importa cuántas cifras, de los que no será difícil hallar la mitad:

42 866 × 5 = 42 866 × 10 = 428 660 42 866 × 5 = 224 330

Y los habrá con menos cifras en los que averiguar el resultado será más complejo:

379 × 5 =

379 × 10 = 3 790

379 × 5 = 1 895

Los trucos 2 y 3 responden a las mismas premisas, y los diferenciamos aquí por la importancia que cobra el truco 2 para hallar las raíces cuadradas de los números de tres y cuatro cifras.

Truco 2. La explicación es muy sencilla, pues se trata de la aplicación de la propiedad asociativa. Sea 45 × 45 o 45^2.

×	40	5
40	1 600	200
5	200	25

Los productos anteriores se expresan así:

1.º (40 × 40) + (40 × 5) + (40 × 5) + (5 × 5).

Ahora bien (40 × 5) + (40 × 5) es igual a 40 × 10, por lo que tendríamos:

2.º (40 × 40) + (40 × 10) + (5 × 5).

Ahora bien (40 × 40) + (40 × 10) es igual a 40 × 50, y como el cuadrado de cinco es siempre 25, tenemos:

3.º 452 = 40 × 50 + 25 = 2 000 + 25 = 2 025.

Truco 3. Es la misma explicación anterior. Lo único que varía es que las cifras de las unidades, si bien suman diez, son distintas de cinco.

Soluciones

1. a) 6 120 b) 1 685 c) 16 850 d) 168,5

2. a) 3 025 c) 1 209 e) 0,3025 g) 12,09 i) 12,09

b) 30,25 d) 4 225 f) 7 224 h) 1 001

Pág. 76 Sugerencias metodológicas

Truco 4. En este caso, las cifras de las decenas de ambos factores suman una centena, y se han de multiplicar por la misma cifra de unidades. Lo vemos con el mismo ejemplo del libro:

×	60	3
40	2 400	120
3	180	9

Los productos anteriores se expresan así:

1.º (60 × 40) + (40 × 3) + (60 × 3) + (3 × 3).

Ahora bien (40 × 3) + (60 × 3) es igual a 100 × 3, por lo que tendríamos:

2.º (60 × 40) + (100 × 3) + (3 × 3).

El resultado es 2 400 + 300 + 9 = 2 709.

Límites de los siguientes «trucos». Los límites de los trucos 5, 6 (y 7 y 8) están en la capacidad para resolver mentalmente el producto de las diferencias y en la de sumar esos productos al número obtenido por la sustracción a un factor de la diferencia a cien del otro. Por ejemplo, no tiene sentido aplicar la técnica al producto 68 × 34, ya que habría que multiplicar mentalmente las diferencias a cien de ambos factores (32 × 66). Del mismo modo, si el producto es de 23 × 98, el producto de las diferencias no es complicado (77 × 2 = 154). Sí puede serlo, para alumnos y alumnas no expertos, sumar a 2 100 el número 154. Como los escolares ABN poseen un cálculo mental muy potente, la aplicación de estos dos trucos sería:

Truco 5. Uno de los factores debe ser mayor de 90 y el otro puede tener una diferencia a cien de dos cifras. Es el caso de 96 × 41.

1. Las diferencias respectivas a cien son 4 y 59.

2. Las dos primeras cifras son 37__ (3 700).

3. El producto de las diferencias es 59 × 4 = 236.

4. El resultado es 3 700 + 236 = 3 936.

Truco 6. Uno de los factores debe ser mayor de 990 y el otro mayor de 900. Seguimos la pauta que ya se marcó en el caso del ejemplo anterior. Por ejemplo, 995 × 926:

1. Las diferencias a cien son 5 y 74.

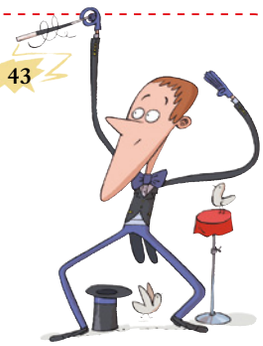
2. Se resta la diferencia del mayor al menor factor: 921__ (921 000).

3. El producto de las diferencias es (74 × 5) 370. El resultado será 921 370.

Los niños y las niñas con mayor capacidad de cálculo mental podrían hallar el producto incluso cuando el segundo factor sea inferior a 900. Por ejemplo, 994 × 687.

Abreviaciones para el cálculo mental en el producto II

Truco 4: Producto de dos números de dos cifras con la misma cifra de unidades y cuyas decenas sumen 10 → 63 × 43

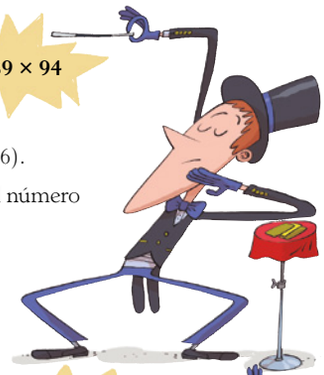


Se obtiene un producto de cuatro cifras.

1. Se multiplican las decenas entre sí: 60 × 40 = 2 400.
2. Se multiplica la cifra de las unidades por cien (3 × 100 = 300), y se suma al número anterior (2 400 + 300 = 2 700).
3. Se multiplican las cifras de las unidades (3 × 3 = 9). Se le suma al número anterior y ya tenemos el producto.

El resultado es: 63 × 43 = 2 709.

Truco 5: Producto de dos factores cercanos a 100 → 89 × 94



Se obtiene un producto de cuatro cifras.

1. Se hallan las diferencias a cien de ambos factores (11 y 6).
2. Al número menor se le resta la diferencia hasta cien del número mayor (89 − 6 = 83). Esas son las dos primeras cifras.
3. Se multiplican las diferencias (11 × 6 = 66). Esas son las dos últimas cifras.

El producto buscado es 8 366.

Truco 6: Producto de dos factores cercanos a 1 000 → 992 × 996

Se obtiene un producto de seis cifras.

1. Se hallan las diferencias a mil de ambos factores (8 y 4).
2. Al número menor se le resta la diferencia a mil del número mayor (992 − 4 = 988). Esas son las tres primeras cifras.
3. Se multiplican las diferencias (8 × 4 = 32). Esas son las dos últimas cifras.

El producto buscado es 988 032.

1 Aplica estos trucos para resolver los productos siguientes de forma rápida.

a) 91 × 11 d) 73 × 33 g) 84 × 24

b) 96 × 98 e) 97 × 99 h) 9,6 × 9,8

c) 999 × 989 f) 987 × 998 i) 99,3 × 99,4

76

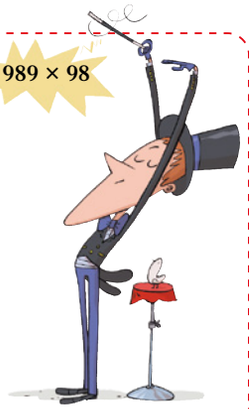
Soluciones

1. a) 1 001 c) 988 011 e) 9 603 g) 2 016 i) 9 830,7

b) 9 408 d) 2 409 f) 985 026 h) 94,08

Abreviaciones para el cálculo mental en el producto III

Truco 7: Producto de un factor cercano a 1 000 y otro a 100 → **989 × 98**



Se obtiene un producto de cinco cifras.

1. Se hallan las diferencias a mil y a cien de ambos factores (11 y 2).
2. Al número mayor se le resta la diferencia, a cien, en decenas, del número menor (989 − 2 D = 969). Esas son las tres primeras cifras.
3. Se multiplican las diferencias (11 × 2 = 22). Esas son las dos últimas cifras.

El producto buscado es 96 922.

Truco 8: Producto de un factor cercano a 1 000 y otro a 10 → **998 × 8**

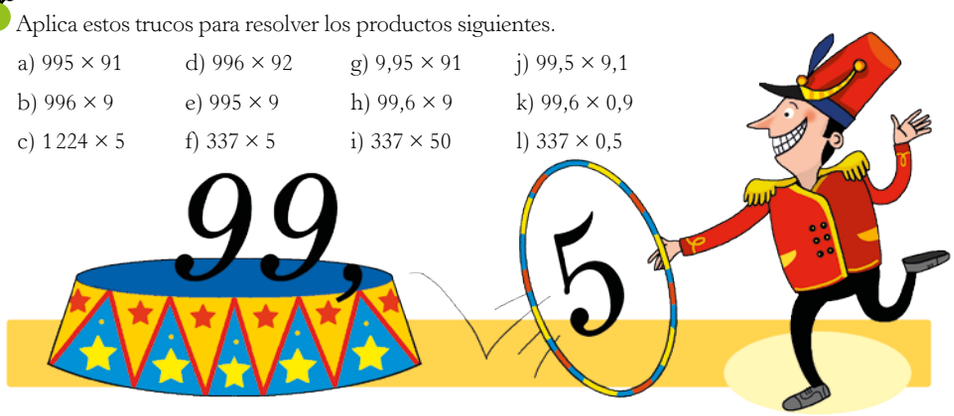
Se obtiene un producto de cuatro cifras.

1. Se hallan las diferencias a mil y a diez de ambos factores (2 y 2).
2. Al número mayor se le resta la diferencia, a diez, en centenas, del número menor (998 − 2 C = 798). Estas son las tres primeras cifras.
3. Se multiplican las diferencias de ambos números (2 × 2 = 4). Esta es la última cifra del producto.

El producto buscado es 7 984.

1 Aplica estos trucos para resolver los productos siguientes.

a) 995 × 91	d) 996 × 92	g) 9,95 × 91	j) 99,5 × 9,1
b) 996 × 9	e) 995 × 9	h) 99,6 × 9	k) 99,6 × 0,9
c) 1 224 × 5	f) 337 × 5	i) 337 × 50	l) 337 × 0,5



Anotaciones

Pág. 77 Sugerencias metodológicas

Trucos 7 y 8: Son variantes de los trucos anteriores números 5 y 6. En principio, se les pueden aplicar los mismos límites y patrones que se han indicado para el truco 5.

Soluciones

1.

a) 90 545	d) 91 632	g) 905,45	j) 905,45
b) 8 964	e) 8 955	h) 896,4	k) 89,64
c) 6 120	f) 1 685	i) 16 850	l) 168,5

Anotaciones

Pág. 78 Sugerencias metodológicas

Repasamos en esta página la elaboración de escalas que permiten al alumnado hacer buenas estimaciones con el fin de resolver divisiones de más de una cifra. La utilización de la escala viene a poner remedio a un problema de la división ABN por dos cifras: al trabajar con números completos, no se puede utilizar la técnica empleada en la división por una cifra. Esta se basa en el conocimiento de las tablas de los dígitos, más el once y el doce. Pero no se puede pretender que el alumnado domine la tabla correspondiente al divisor que aparezca, sea este 23, 57 o 91. La escala en esencia pone al alumnado en condiciones de:

1. Determinar con exactitud el mayor orden de magnitud que puede repartir o agrupar. Una vez construida la escala, los escolares saben si lo máximo que han de repartir son millares o centenas o lo que sea.

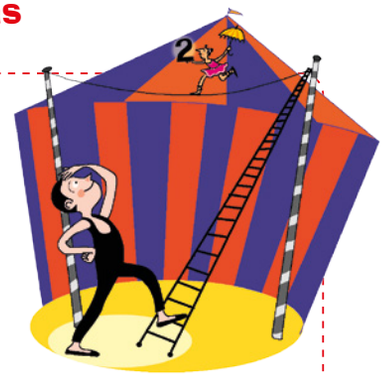
2. Ofrecer un abanico no muy amplio en el que puedan estimar y aproximar lo más posible el cociente parcial que corresponda.

Este segundo punto es capital. Deben aprender a estimar, a hacer cálculos aproximados llevados por su conocimiento de los números. En la división 6 874 : 22, deben deducir el cociente parcial primero sabiendo que está entre 100 (2 200) y 500 (11 000).

Pero no solo saben eso. Pueden añadir o quitar a los extremos de la escala una o más veces la proporción más pequeña, con lo que su capacidad para determinar con exactitud el cociente correcto es elevada.

Con el uso de la escala no se pueden pasar, esto es, elegir un cociente mayor que el que corresponde. Pero no ocurre nada si se quedan cortos. Necesitarán de otro paso, y nada más.

División por dos cifras con escalas



Con un ejemplo recordamos cómo realizar una división con dividendo de varias cifras entre un divisor de dos cifras. Para hacerlo más sencillo usaremos la escala.

Recuerda que para crear la escala partiremos del divisor y lo multiplicaremos por la unidad seguida de ceros hasta encontrar un intervalo dentro del cual se encuentre el dividendo.

Una vez establecido el intervalo, tomamos la cifra mayor y calculamos la mitad para completar la escala.

Dividimos 4 658 : 24 y para ello creamos primero la escala:

Primer paso

100 → 2 400 500 → 12 000 1 000 → 24 000			Establecemos la escala en la que el dividendo quede entre el producto más bajo y el más alto.
		: 24	
4 658			

Segundo paso

100 → 2 400 500 → 12 000 1000 → 24 000			Buscamos una combinación para acercarnos al dividendo. Puede ser…
		: 24	100 + 50 = 150
4 658	3 600	150	Cuyo producto es:
1 058			2 400 + 1 200 = 3 600

Tercer paso

10~~0~~ → 240~~0~~ 50~~0~~ → 1200~~0~~ 100~~0~~ → 2400~~0~~			Hacemos la escala 10 veces menor y buscamos qué producto se acerca al nuevo dividendo. Puede ser…
		: 24	50 − 10 = 40
4 658	3 600	150	Cuyo producto es:
1 058	960	40	1 200 + 240 = 960
98			

Cuarto paso

1~~00~~ → 24~~00~~ 5~~00~~ → 120~~00~~ 1 0~~00~~ → 240~~00~~			Buscamos una combinación para acercarnos al nuevo dividendo; esta puede ser…
		: 24	5 − 1 = 4
4 658	3 600	150	Cuyo producto es:
1 058	960	40	120 + 24 = 96
98	96	4	
R = 2		194	

1 Crea las escalas para las siguientes operaciones, sin hacer las divisiones.

a) 3 178 : 32 b) 4 456 : 45 c) 2 572 : 52 d) 8 562 : 78

2 Calcula las divisiones anteriores utilizando las escalas que has hecho anteriormente.

78

En esta página se explica la técnica de la construcción de la escala, que se cierra con un ejercicio de aplicación. En las siguientes páginas se continúa trabajando este aspecto.

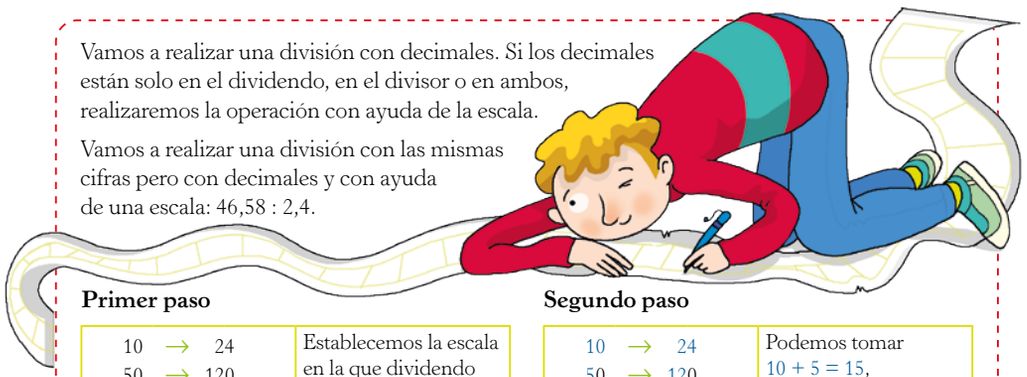
Soluciones

1. a) 3 178 : 32 b) 4 456 : 45 c) 2 572 : 52 d) 8 562 : 78

32 × 10 = 320 32 × 50 = 1 600 32 × 100 = 3 200	45 × 10 = 450 45 × 50 = 2 250 45 × 100 = 4 500	52 × 10 = 520 52 × 50 = 2 600 52 × 100 = 5 200	78 × 100 = 7 800 78 × 500 = 39 000 78 × 1 000 = 78 000

2. a) 108 R = 22 b) 99 R = 1 c) 49 R = 24 d) 109 R = 60

División con decimales por dos cifras con escalas



Vamos a realizar una división con decimales. Si los decimales están solo en el dividendo, en el divisor o en ambos, realizaremos la operación con ayuda de la escala.

Vamos a realizar una división con las mismas cifras pero con decimales y con ayuda de una escala: 46,58 : 2,4.

Primer paso

10 → 24 50 → 120 100 → 240			Establecemos la escala en la que dividendo quede entre el producto más bajo y el más alto.
		: 2,4	
46,58			

Segundo paso

10 → 24 50 → 120 100 → 240			Podemos tomar 10 + 5 = 15, cuyo producto es: 24 + 12 = 36
		: 24	
46,58	36	15	Tras restar, nos queda un nuevo dividendo de 10,58.
10,58			

Tercer paso

1~~0~~ → 2,4 5~~0~~ → 12~~0~~ 10~~0~~ → 24~~0~~			Hacemos la escala 10 veces menor. Podemos optar por: 5 − 1 = 4, cuyo producto es: 12 − 2,4 = 9,60.
		: 24	
46,58	36	15	50 − 10 = 40 Cuyo producto es: 1 200 + 240 = 960
10,58	9,6	4	
0,98			

Cuarto paso

0,1~~0~~ → 0,24 0,5~~0~~ → 1,2~~0~~ 1~~00~~ → 2,4~~0~~			Hacemos la escala 10 veces menor. Podemos optar por: 0,5 − 0,1 = 0,4, cuyo producto es: 1,2 − 0,24 = 0,96.
		: 24	
46,58	36	15	Con o sin decimales, cualquier división la puedes resolver con ayuda de la escala.
10,58	9,6	4	
0,98	0,96	0,4	
R = 0,02		19,4	

1 Crea las escalas para las siguientes operaciones, sin hacer las divisiones.

a) 378,2 : 16 b) 56,35 : 24 c) 284,6 : 1,8 d) 96,54 : 3,8

2 Calcula las divisiones anteriores utilizando las escalas que has hecho anteriormente y obtén decimales hasta las centésimas.

Anotaciones

Pág. 79 Sugerencias metodológicas

La división con decimales en el divisor no presenta cambios en el formato ni en el procedimiento respecto a la división sin ellos. En ese sentido, se diferencia de la división tradicional, que necesita multiplicar el dividendo y el divisor por la unidad seguida de tantos ceros como decimales tenga el divisor. En el cálculo ABN tal transformación carece de sentido. Se puede operar directamente, puesto que los escolares saben multiplicar con soltura decimales y, a la hora de escribir los restos parciales, no hay que respetar los valores de posición, puesto que se trabaja con números y no con cifras.

Para facilitar la comprensión de lo que se está mostrando, se ha optado por modificar la escala cuando se llega a la división de la parte decimal. Normalmente no hace falta, y la escala queda estancada en los valores que corresponden a la división entre uno, cinco y diez. Como señalamos anteriormente, los alumnos y las alumnas interpretan la escala correctamente cuando saben en cada momento el orden de magnitud que van a repartir.

Soluciones

1. a) 378,2 : 16 b) 56,35 : 24 c) 284,6 : 1,8 d) 96,54 : 3,8

16 × 10 = 160 16 × 50 = 800 16 × 100 = 1 600	24 × 1 = 24 24 × 5 = 120 24 × 10 = 240	1,8 × 10 = 18 1,8 × 500 = 900 1,8 × 1 000 = 1 800	3,8 × 10 = 38 3,8 × 50 = 190 3,8 × 100 = 380

2. a) 23,63 R = 0,12 c) 158,11 R = 0,002
b) 2,34 R = 0,19 d) 25,40 R = 0,02

Anotaciones

Desarrollo de la división posicional por dos cifras sin decimales

Recordamos cómo se hacía la división posicional con el divisor de dos cifras. Observa el ejemplo, en el que hemos intercalado la explicación.

9816 : 16 — **Cociente = 613** — **R = 8**

UM	C	D	U
El cociente tendrá tres cifras, ya que las 9 UM no se pueden repartir entre 16 U.	98	21	56
	Como no podemos dividir 9 UM entre 16, lo hacemos con 98 C. ↓	Las 2 C sobrantes junto a la 1 D forman 21 D. ↓	Las 5 D sobrantes junto a las 6 U forman 56 U. ↓
	6	**1**	**3**
	Tocan a 6 C. Repartimos $16 \times 6 = 96$ y sobran $98\ C - 96\ C = 2\ C$	Tocan a 1 D. Repartimos $16 \times 1 = 16$ y sobran $21\ D - 16\ D = 5\ D$	Tocan a 3 U. Repartimos $16 \times 3 = 48$ y sobran $56\ U - 48\ U = 8\ U$

Resumiendo, la operación quedaría así:

9816 : 16 — **Cociente = 613** — **R = 8**

UM	C	D	U
	98	21	56
	6	**1**	**3**

El resultado es 613 y el resto es 8.

1 Indica las cifras que tendrá el cociente de estas divisiones.

a) 3 609 : 52 → 3 cifras c) 1 044 : 23

b) 6 666 : 11 d) 6 456 : 32

2 Haz las siguientes divisiones exactas con el formato posicional.

a) 4 984 : 14 b) 2 160 : 15 c) 7 084 : 28

3 Haz las siguientes divisiones enteras con el formato posicional.

a) 2 148 : 18 b) 8 244 : 46 c) 5 332 : 21

Pág. 80 Sugerencias metodológicas

El trabajo con los algoritmos ABN del cálculo es mucho más complejo y abarca más contenidos que en el caso de los tradicionales. En esta página se plasma el trabajo realizado en niveles inferiores a través de los crecientes y los patrones, de una parte, y en la práctica de los algoritmos con formatos posicionales. Se ha de aprovechar lo que ya saben sobre la división posicional para iniciar a los niños y a las niñas en la práctica del formato posicional cuando la división tiene un divisor de dos cifras. Es, como tantas veces se hace, desarrollar con números mayores lo que ya se sabe hacer con números más pequeños. Pero se recomienda que en estos primeros pasos se empleen cantidades pequeñas, en el dividendo, de tres o cuatro cifras, y que se contemplen los siguientes gradientes de dificultad:

1. Las dos primeras cifras del dividendo son iguales o más altas que las del divisor, y la división es exacta. Por ejemplo, 506 : 23.

2. Las dos primeras cifras del dividendo son más bajas que las del divisor, y la división es exacta. Por ejemplo, 1150 : 25.

3. Las dos primeras cifras del dividendo son más bajas que las del divisor, y la división es inexacta. Por ejemplo, 1256 : 43.

Soluciones

1. a) 3 cifras b) 3 cifras c) 2 cifras d) 3 cifras

2. a) 356 R = 0 b) 144 R = 0 c) 253 R = 0

3. a) 119 R = 6 b) 179 R = 10 c) 253 R = 19

La división posicional por dos cifras y decimales en el dividendo

Recordamos cómo se hacía la división posicional con el divisor de dos cifras. Observa el ejemplo, que también lleva la explicación de todo el proceso.

84,74 : 32 **Cociente = 2,64 R = 0,26**

D	U	d	c
El cociente tendrá tres cifras ya que las 8 D no se pueden repartir entre 32 U.	84	207	154
	Como no podemos dividir 8 D entre 32, lo hacemos con 84 U. ↓	Las 20 U sobrantes junto a las 7 d forman 207 d. ↓	Las 15 d sobrantes junto a las 4 c forman 154 d. ↓
	2	**6**	**4**
	Tocan a 2 U. Repartimos $32 \times 2 = 64$ y sobran $84\text{ U} - 64\text{ U} = 20\text{ U}$	Tocan a 6 d. Repartimos $32 \times 6 = 192$ y sobran $207\text{ d} - 192\text{ d} = 15\text{ d}$	Tocan a 4 c. Repartimos $32 \times 4 = 128$ y sobran $154\text{ c} - 128\text{ c} = 26\text{ c}$

Resumiendo, la operación quedaría así:

84,74 : 32 **Cociente = 2,64 R = 0,26**

D	U	d	c
	84	207	154
	2	**6**	**4**

El resultado es 2,64 y el resto es 0,26.

1 Indica las cifras que tendrá el cociente de estas divisiones.

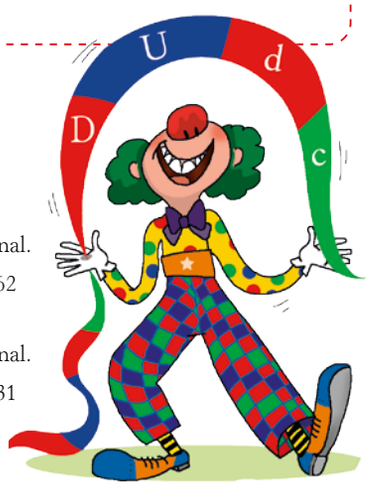
a) 360,9 : 15 → dos cifras enteras
b) 458,8 : 38
c) 105,8 : 25
d) 58,72 : 26

2 Haz las siguientes divisiones enteras con el formato posicional.

a) 149,4 : 45 b) 123,2 : 28 c) 213,9 : 62

3 Haz las siguientes divisiones enteras con el formato posicional.

a) 22,61 : 19 b) 53,75 : 25 c) 99,82 : 31



Anotaciones

Pág. 81 Sugerencias metodológicas

La división posicional con decimales en el divisor no implica una dificultad añadida, pues se trata, como en tantas ocasiones, de extender lo que ya conocen a una nueva situación. En este caso, al llegar a los órdenes de magnitud de las décimas o centésimas, continuamos como hemos hecho con los anteriores órdenes de mayor magnitud. El ejemplo de la página lo ilustra claramente.

Soluciones

1. a) 2 cifras enteras b) 2 cifras enteras c) 1 cifra entera d) 2 cifras enteras

2. a) 3,32 R = 0 b) 4,4 R = 0 c) 3,45 R = 0

3. a) 1,19 b) 2,15 c) 3,22

Anotaciones

La división posicional por dos cifras con decimales en el divisor

Recordamos cómo se hacía la división posicional con el divisor de 2 cifras. Observa el ejemplo con su explicación.

794 : 3,1 — **Cociente = 256,12** — **R = 28 m**

	C	D	U	d	c
	7	17	19	4	9
El cociente tendrá tres cifras enteras ya que las 7 C se pueden repartir entre 3,1 U.	7 C entre 3,1. ↓	Las 8 D sobrantes junto a las 9 D forman 17 D. ↓	La 15 U sobrantes junto a las 4 U forman 19 U. ↓	Las 4 d las podemos seguir repartiendo entre 3,1. ↓	Las 9 c las podemos seguir repartiendo entre 3,1. ↓
	2	**5**	**6**	**1**	**2**
	Tocan a 2 C. Repartimos 3,1 × 2 = 6,2 y sobran 7 C − 6,2 C = = 0,8 C o 8 D	Tocan a 5 D. Repartimos 3,1 × 5 = 15,5 y sobran 17 D − 15,5 D = = 1,5 D o 15 U	Tocan a 6 U. Repartimos 3,1 × 6 = 18,6 y sobran 19 U − 18,6 U = = 0,4 U o 4 d	Toca a 1 d. Repartimos 3,1 × 1 = 3,1 y sobran 4 d − 3,1 d = = 0,9 c o 9 c	Toca a 2 c. Repartimos 3,1 × 2 = 6,2 y sobran 9 c − 6,2 c = = 2,8 c o 28 m

Resumiendo, la operación quedaría así:

794 : 3,1 — **Cociente = 256,12** — **R = 28 m**

C	D	U	d	c
7	17	19	4	9
2	**5**	**6**	**1**	**2**

El resultado es 256,12 y el resto es 0,028.

1 Indica las cifras que tendrá el cociente de estas divisiones.

a) 649 : 4,6 → tres cifras enteras
b) 588 : 3,5
c) 158 : 2,4
d) 872 : 2,8

2 Haz las siguientes divisiones con el formato posicional.

a) 588 : 3,5
b) 174 : 1,2
c) 588 : 2,4

3 Haz las siguientes divisiones enteras con el formato posicional y obtén dos cifras decimales.

a) 305 : 1,6
b) 575 : 2,2
c) 682 : 3,2

Pág. 82 Sugerencias metodológicas

En esta última página dedicada a las divisiones posicionales, se trabajan las divisiones con decimales en el divisor. En este caso continuamos el procedimiento tal y como lo hemos hecho hasta ahora.

Hacemos notar que con las divisiones posicionales todo el proceso queda oculto y, en cada paso, referido a un orden de magnitud. Esta es una importante diferencia de la división en la rejilla ABN. Por el contrario al igual que en la resuelta en el formato ABN estándar, y a diferencia del cálculo tradicional, el resto que se obtiene es el real y no multiplicado por 10, 100, … Aquí no hay que eliminar decimales, sino usarlos tal y como se ha hecho en situaciones anteriores.

Soluciones

1. a) 3 cifras enteras. c) 2 cifras enteras.
b) 3 cifras enteras. d) 3 cifras enteras.

2. a) 168 R = 0 b) 145 R = 0 c) 245 R = 0

3. a) 190,62 R = 0,008 b) 261,36 R = 0,007 c) 213,12 R = 0,016

Problemas de más de dos operaciones I

Los problemas de más de dos operaciones pueden contener dos o más preguntas ocultas. Cada pregunta oculta corresponde a un paso intermedio que debes realizar para llegar a la solución final.

Un cómic de superhéroes cuesta 9,95 € y una figura de acción 15,65 €. Si Luca compra 3 cómics y 2 figuras de acción, ¿cuánto se gastará en total?

P.O. 1: ¿Cuánto cuestan los cómics? 9,95 × 3 = 29,85 €/cómics

P.O. 2: ¿Cuánto cuestan las figuras de acción? 15,65 × 2 = 31,30 €/figuras

31,30 + 29,85 = **61,15 € se gastará en total**

Puedes escribir las preguntas ocultas o indicar qué obtienes al realizar cada operación.

Resuelvo problemas

1. En las cámaras refrigerantes del supermercado quedan 6 packs de 8 yogures cada uno y un solo pack de 4 yogures. Se acaba de lanzar una nueva promoción de yogures del Hombre araña y se añaden 10 packs de 8. ¿Cuántos yogures tienen ahora en el refrigerador?

2. Un grupo de villanos ha llevado a cabo un atraco a un banco llevándose 10 sacos con 12 bolsas de dinero en cada saco. El Hombre murciélago intervino y consiguió recuperar 84 bolsas. ¿Cuántos sacos han conseguido robar los atracadores?

3. Noelia es vendedora de globos de superhéroes en un parque de atracciones. Cada semana ella compra los globos a su proveedor a 6 € la docena. Luego los vende a 2 € cada globo. ¿Cuántas docenas deberá vender para ganar 90 €?

Invento, creo y razono

4. Observa cómo se ha resuelto este problema e indica qué se obtiene al realizar cada una de las operaciones.

Un tour con autobús por los estudios Marvel cuesta 5 €. Cada dos personas que suben al autobús en alguna de las paradas, se baja una. Si al final del día de hoy se han recaudado 250 €, ¿con cuántas personas inició el tour el autobús si al final terminó con 40 personas?

250 : 5 = 50 50 − 40 = 10 10 × 2 = 20 50 − 20 = 30

S: 30 personas iniciaron el tour Marvel.

Anotaciones

Pág. 83 Sugerencias metodológicas

Hemos mencionado en numerosas ocasiones que hallar las preguntas ocultas y responderlas permite al alumnado establecer el orden en el que realizar las operaciones y, en consecuencia, resolver el problema. Sin embargo, debemos remarcar que las preguntas ocultas son también un modelo que les facilita enormemente la comprensión de cada uno de los pasos intermedios a realizar dentro de cada problema. No se trata solo de saber qué hay que hacer en cada momento: se busca en este caso que entiendan para qué hacemos cada operación, qué vamos a hallar o qué vamos a averiguar en cada cálculo.

Los problemas propuestos en esta página son de tres o cuatro operaciones. Se propone como estrategia de resolución fundamental hallar las preguntas ocultas o, en su defecto indicar qué se obtiene al realizar cada una de las operaciones intermedias. Siempre debe de quedar claro el porqué los cálculos realizados y qué se obtiene con ellos.

Las cantidades utilizadas en la redacción de los problemas son de dos o tres cifras puesto que lo importante no son los cálculos a realizar, sino los procesos de resolución que deben aplicar. El docente debe tener en cuenta que hay varios caminos de resolución para las situaciones propuestas. Se deben escuchar todas las opciones descubiertas por el alumnado y fomentar la posibilidad de resolver un mismo problema de formas diferentes.

Soluciones

1. 6 × 8 = 48 yogures 48 + 4 = 52 yogures quedan
8 × 10 = 80 yogures añaden 52 + 80 = 132 yogures hay ahora.

2. 12 × 10 = 120 bolsas robaron 120 − 84 = 36 bolsas se quedaron
36 : 12 = 3 sacos se llevaron.

3. 2 × 12 = 24 €/recauda con una docena 24 − 6 = 18 € gana con una docena 90 : 18 = 5 docenas deberá vender.

4. 250 : 5 = 50 pasajes/vendidos.
50 − 40 = 10 personas bajaron durante el tour.
10 × 2 = 20 personas subieron durante el tour.
50 − 20 = 30 personas iniciaron el tour.

Pág. 84 Sugerencias metodológicas

Se continúa en esta página con la presentación de problemas con más de dos operaciones. En este caso, se proponen situaciones que se originan a partir de la categoría de Doble Inclusión, aunque sensiblemente más complejas. Se espera que alumnado sea capaz de afrontarlas partiendo del conocimiento y la experiencia obtenida a partir del trabajo previo realizado con dicha categoría.

En el encabezado se guía al alumnado en la resolución del problema más complejo que se ofrece en esta página. Dicho problema parte de la situación del nivel III de Doble Inclusión (A-A) añadiéndole una variable más. La estrategia sería la misma: detraer del total las diferencias. La dificultad reside en que, si Tom tiene dos más que Carry, y Germaine dos más que Tom, esta a su vez tiene 4 más que Carry. La diferencia total serían 6 (2 + 4). El alumnado tiende a pensar que la diferencia son 4 (2 + 2) y es esta diferencia la que detraen del total, llevando todo esto a una solución incorrecta. Por eso se acompaña el enunciado de un esquema que tiene como objetivo hacer más visibles las diferencias entre los tres personajes, aclarando esta parte del problema.

Es altamente recomendable que antes de abordar los problemas propuestos en esta página el docente plantee situaciones manipulativas similares a las aquí recogidas (repartir 18 fichas entre tres personas sabiendo que cada uno tendrá dos fichas más que el otro). De esta actividad manipulativa saldrán diversas estrategias que deben converger en la generalización de un proceso.

Como ya se ha mencionado, en el encabezado se muestra una forma (hay otras) de resolver este tipo de problemas, que insistimos, son de alta complejidad. Posteriormente, se plantean 3 problemas distintos: el ejercicio 3 es como el del encabezado; el 1 y el 2 son más sencillos; finalmente, en el ejercicio 4, se le pide al alumnado que invente un problema a partir del enunciado y el esquema propuesto.

Soluciones

Encabezado:

2 + 4 = 6 21 − 6 = 15

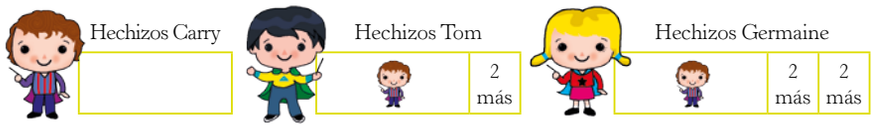
15 : 3 = 5 Carry 5 + 2 = 7 Tom 7 + 2 = 9 Germaine.

RESUELVO PROBLEMAS

Problemas de más de dos operaciones II

Sigo los pasos y resuelvo el problema

Tres jóvenes magos (Tom, Carry y Germaine) han realizado 21 hechizos entre los tres. Tom ha realizado dos hechizos más que Carry, y Germaine dos más que Tom. ¿Cuántos hechizos ha realizado cada uno?



1. Retira del total de hechizos los hechizos de más que han realizado Tom y Germaine.
2. Averigua los hechizos que realizaría cada uno si no hubiese diferencias entre ellos. Esos serán los hechizos realizados por Carry.
3. Finalmente, partiendo de los de Carry ya te resultará fácil saber los realizados por Tom y por Germaine.

Resuelvo problemas

1. Un recipiente de pociones contiene 1 500 mL de zumo de mandrágora, 500 mL más que una botella y 3 500 mL menos que una garrafa. ¿Cuántos litros de zumo de mandrágora hay entre los tres recipientes?

2. Tres jóvenes hechiceras (Paula, Adara y Sofía) han recogido 268 capas de mago de la sala común. Entre Paula y Adara han recogido 189 capas. Si Sofía ha recogido 27 capas más que Paula, ¿cuántas capas cogió Adara?

3. Carry tarda 45 segundos en dar tres vueltas con la escoba voladora al campo de Puiddizt. En cada vuelta, tarda 5 segundos más que en la anterior. ¿Cuánto tiempo tarda en completar cada vuelta?

Invento, creo y razono

4. Inventa un problema similar al del encabezado a partir del siguiente esquema y resuélvelo.

En la escuela de magia hay tres casas con un total de 90 magos …

84

1. 1 500 − 500 = 1 000 1 500 + 3 500 = 5 000

5 000 + 1 000 + 1 500 = 7 500 mL = 7,5 L

2. 268 − 189 = 79 capas/Sofía

79 − 27 = 52 capas/Paula 189 − 52 = 137 capas/Adara

3. 5 + 10 = 15 45 − 15= 30 30 : 3 = 10 s/1.ª vuelta

10 + 5 = 15 s/2.ª vuelta 15 + 5 = 20 s/3.ª vuelta

4. En la escuela de magia hay tres casas con un total de 90 magos. En la casa Raven hay 10 magos más que en Slicer y en Griffin 10 magos más que en Raven. ¿Cuántos magos hay en cada casa?

10 + 20 = 30 90 − 30 = 60 60 : 3 = 20 magos/Slicer

20 + 10 = 30 Raven 30 + 10 = 40 Griffin

Problemas de más de dos operaciones III

Sigo los pasos y resuelvo el problema

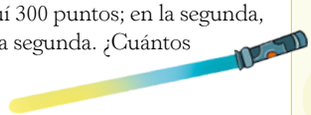
Tres raros extraterrestres tienen en total 14 ojos. Kang tiene el doble de ojos que King, mientras que Kong tiene 4 veces más King. ¿Cuántos ojos tiene cada uno?

14 ojos en total						
KING	KANG	KANG	KONG	KONG	KONG	KONG

1. Averigua el número de partes/veces que representan el total.
2. Halla el valor de una sola parte: serán los ojos que tiene King.
3. Finalmente, partiendo de los ojos de King, calcula los de los otros dos.

Resuelvo problemas

1. En mi primera partida al videojuego de los marcianitos conseguí 300 puntos; en la segunda, 4 veces más que en la primera, y en la tercera, la mitad que en la segunda. ¿Cuántos puntos he conseguido en total entre mis 3 primeras partidas?



2. En una nave interplanetaria viajan 175 extraterrestres (marcianos, marcianas y mascotas). Sabemos que hay 50 marcianos, el doble de marcianas que de marcianos y el resto son mascotas. ¿Cuántas veces más mascotas que habitantes de Marte hay en la nave?

3. Frog se ha gastado 480 monedas comprando un intercomunicador, una espada láser y unas botas espaciales. El intercomunicador cuesta 5 veces más que las botas, y la espada láser cuesta el doble que estas. ¿Cuánto cuesta cada artículo?

Invento, creo y razono

4. Inventa un problema similar al del encabezado a partir del siguiente esquema y resuélvelo.

Una flota galáctica está compuesta por tres naves con un total de 180 cañones…

Nave 1	Nave 2	Nave 2	Nave 3	Nave 3	Nave 3

Pág. 85 Sugerencias metodológicas

Se termina en esta página con la propuesta de problemas con más de dos operaciones. En este caso, se proponen situaciones que se originan a partir de la categoría de Doble Inclusión, aunque sensiblemente más complejas. Se espera que el alumnado sea capaz de afrontarlas partiendo del conocimiento y la experiencia obtenida a partir del trabajo previo realizado con dicha categoría.

En el encabezado se guía al alumnado en la resolución del problema más complejo que se ofrece en esta página. Dicho problema parte de la situación del nivel III de Doble Inclusión (A–M) añadiéndole una variable más. La clave de estos problemas está en que el alumnado comprenda cuántas partes o veces representan el total. Si yo tengo 3 veces lo que tú tienes, entre los dos tenemos 4 veces/partes porque tú tienes una vez y yo 3. La comprensión de este concepto requiere manipulación con objetos que se encuentren en el aula (lápices, fichas de parchís, dominó, ajedrez…) planteando situaciones de este estilo. Una vez resuelta esta parte del problema será más sencillo saber lo que tiene cada uno. El alumnado tiende a resolver mal estos problemas porque no halla el número de partes o veces totales, sino que divide directamente el total entre las veces más o menos que tiene uno con respecto al otro. Por eso se acompaña el enunciado con un esquema, que tiene como objetivo hacer más visibles las partes/veces que forman el total.

Como ya se ha mencionado, en el encabezado se muestra una forma de resolver este tipo de problemas, que insistimos, son de alta complejidad. Posteriormente, se plantean 3 problemas distintos: el ejercicio 3 es como el del encabezado; el 1 y el 2 son algo más sencillos; finalmente, en el ejercicio 4 se le pide al alumnado que invente un problema a partir del enunciado y el esquema propuesto.

Soluciones

Encabezado:

1 + 2 + 4 = 7 partes/veces.

14 : 7 = 2 ojos/King.

2 × 2 = 4 ojos/Kang.

2 × 4 = 8 ojos Kong.

1. 300 × 4 = 1 200 1 200 : 2 = 600
1 200 + 600 + 300 = 2 100 puntos en total.

2. 50 × 2 = 100/marcianas 100 + 50 = 150 hab. Marte
175 − 150 = 25 mascotas 150 : 25 = 6 veces más.

3. 1 + 5 + 2 = 8 partes 480 : 8 = 60 €/botas
60 × 5= 300 €/Intercomunicador 60 × 2 = 120 €/espada.

4. Una flota galáctica está compuesta por tres naves con un total de 180 cañones láser. La nave dos tiene el doble de cañones que la nave 1, mientras que la nave 3 tiene el triple de cañones que la 1. ¿Cuántos cañones láser tiene cada nave?

3 + 2 + 1 = 6 partes 180 : 6 = 30 cañones/nave 1
30 × 2 = 60 nave 2 30 × 3 = 90 nave 3.

Anotaciones

TAREA COMPETENCIAL

Organizando un torneo escolar

El alumnado de sexto quiere organizar unas jornadas de deportes colectivos en las que realizar diferentes torneos de fútbol, baloncesto y voleibol. Son muchas las tareas que deben llevar a cabo previamente. Ponte en su lugar y ayúdales con los preparativos.

1 En primer lugar, deben realizar un presupuesto para material deportivo. Quieren comprar 5 pelotas de fútbol, 4 de baloncesto, 4 de vóley y una red de vóley. ¿Cuánto dinero necesitarán aproximadamente?

a) Aproximadamente 350 €.

b) Aproximadamente 200 €.

c) Aproximadamente 450 €.

2 Teniendo en cuenta la cantidad de dinero que necesitarán, han decidido poner un precio de inscripción para cada participante y así poder costear los gastos del torneo. Para ello han elaborado una tabla estimando cuánto recaudarían según fuese el precio de la inscripción. Complétala y decide qué precio es el más adecuado según los gastos del torneo.

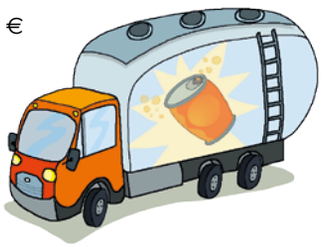
Precio por participante	1,5	0,15	2,5	0,25	3,5	0,35
Dinero recaudado con 150 participantes	225 €	…	…	37,5 €	…	…

El precio de la inscripción debería de ser de …

3 Finalmente se han inscrito 189 participantes. ¿Cuánto dinero recaudarán en total?

a) 661,5 € b) 472,5 € c) 283,5 € d) 47,52 €

4 Con el dinero que les ha sobrado después de pagar el material deportivo deciden comprar bebida isotónica. Han podido adquirir 252 litros. Si cada botella tiene 1,5 L, ¿cuántas botellas han comprado? Si en total se han inscrito 21 equipos, ¿cuántas botellas le corresponderán a cada uno?



Pág. 86 Sugerencias metodológicas

Las mismas sugerencias metodológicas que la tarea competencial anterior.

Soluciones

1. Opción a).

2.

Precio por participante	1,5	0,15	2,5	0,25	3,5	0,35
Dinero recaudado con 150 participantes	225 €	22,5	375	37,5 €	525	52,5

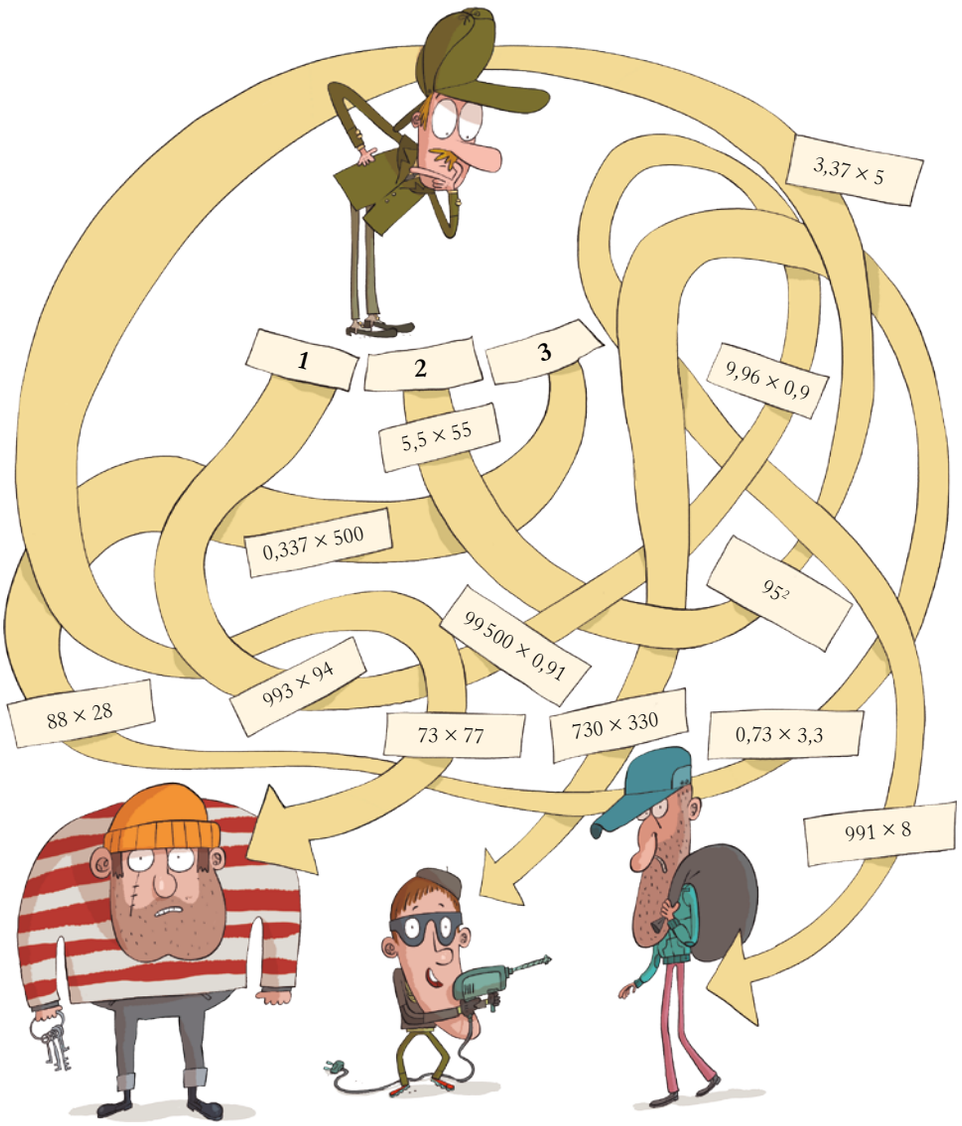
Teniendo en cuenta los gastos del torneo, lo más adecuado sería cobrar la inscripción a 2,5 € por participante.

3. Opción b).

4. 252 : 1,5 = 168 botellas 168 : 21 = 8 botellas por equipo.

REPASO

1 El detective Sah Ueso ha encontrado la pista para detener al delincuente. Sabe que le llaman «el Impar», ya que tiene la costumbre de pagar sus gastos con una cantidad impar de monedas. Averigua en tu cuaderno cuál es el camino con más resultados impares y sabrás a quién capturó.



Anotaciones

Pág. 87 Soluciones

Camino 1: 93 342 / 8,964 / 90 545 / 7 928

Camino 2: 302,5 / 9025 / 16,85 / 5 621

Camino 3: 168,5 / 2 464 / 2,409 / 240 900

La solución es el camino 2 del ladrón grandullón.

6 PROPORCIONES

Presentación de la unidad

La unidad 6 se dedica a un solo contenido, que es la proporcionalidad. No se trata de un tema menor, ni mucho menos, sino de uno de los puntos centrales de la matemática escolar. Hablamos de proporciones y de proporcionalidad, de regla de tres directa e inversa, de intereses, de porcentajes, de disoluciones, de escalas. La proporcionalidad es otro concepto clave en Geometría y en más partes de la matemática.

¿Cómo se aborda esta unidad? Se hace un tratamiento muy sistemático, que va a hacer reflexionar desde la experiencia del alumno sobre la relación que existe entre datos diversos que parecen tener alguna relación, la intuición, primero, y la definición de las proporcionalidades directas e inversas, la formulación de las reglas de tres (directa e inversa), su aplicación a la resolución de problemas y a la manera de expresar esa proporción, etc.

Una vez explicado lo anterior, se verifica si el alumnado ha entendido o no los conceptos estudiados. Para ello ha de distinguir entre relaciones de magnitudes que sean proporcionales o que no lo sean, y en el caso primero, si esa proporción es directa o inversa. Nótese que las diferenciaciones son dobles. Por un lado, se aprende a diferenciar cuándo una pareja de magnitudes que guardan una relación son o no proporcionales, y por el otro, cuando sí la guardan, si mantienen una proporción directa o indirecta. A la hora de expresar esas proporciones se recurre, entre otros recursos, a las fracciones, que también sirven para expresar una proporción entre dos números.

Sugerencias metodológicas

El alumnado no aborda la proporcionalidad sin haber tenido experiencias previas sobre la misma en los cursos anteriores, si bien no sistematizadas. Por ejemplo, cuando estudiaron los problemas comparativos o de escala, tanto creciente como decreciente, estaban aprendiendo una de las herramientas a utilizar para la resolución de problemas de proporcionalidad. También cuando resolvían ejercicios en los que se manejaban patrones y en los cuales unas cantidades variaban en función de otras asociadas.

En esta unidad se da un paso más. Claro que los niños van a saber que en la vida cotidiana se dan situaciones de proporcionalidad y de no proporcionalidad, pero ahora tendrán que identificar esa relación proporcional, que no es más que la identificación de la comparación multiplicativa entre las magnitudes. Y explotarla, además. Por otro lado, el sentido de la proporcionalidad solo se alcanza cuando se aplica a la vida real y se saben resolver problemas de proporcionalidad, y también los problemas derivados de los anteriores, como son los problemas de porcentajes, intereses y escalas. Para ello hay que insistir a los niños en que no recurran a un solo método, y que en función de las cantidades que entren en juego aprendan a resolverlos no solo por la igualdad entre razones, como se ha hecho hasta ahora mayoritariamente, sino también por la reducción a la unidad y por la construcción de escalas, que permitan extraer el coeficiente de proporcionalidad.

Resolución de problemas

Estamos ante unas páginas en las que la presencia de problemas es abundante. Todos ellos están dedicados a la proporcionalidad, incluyendo la Tarea competencial y las correspondientes actividades de repaso que se presentan al final de la unidad. Para una mejor sistematización de estos problemas, tras la presentación de cada concepto se recogen varias situaciones en las que los alumnos han de poner en práctica lo aprendido. Así, van apareciendo diversos tipos de problemas que van a ayudar a la mejor comprensión de los contenidos, y, tras todas las presentaciones y ejercitaciones, una sistematización de esos problemas en tres niveles de dificultad, que ocupan cada uno de ellos una página.

Educación en valores

Siguiendo el trabajo con valores desde la perspectiva de los porcentajes, identificaremos situaciones de la vida escolar y ordinaria en las que es más justo un reparto porcentual que equitativo. Para ejercitar este tema, aportamos nuevas situaciones en las que deben valorar y explicar por qué el reparto debe ser porcentual o equitativo.

En las situaciones que reseñamos a continuación, pueden surgir apreciaciones que enriquecerán el debate o ayudarán a matizar cada situación:

- El juego es comunitario, pero unos juegan más que otros, o durante el período de espera molestan al que está jugando.
- Se reparten las tareas para un trabajo y no se está conforme con la parte que toca por considerarla más difícil, más extensa, etc., que otras.
- Hay personas que no han participado en un trabajo, pero que se incorporan al mismo una vez acabado. Y reclaman el mismo premio que si hubieran estado en el mismo desde el primer momento.
- Se realiza un reparto en clase y hay quien se aprovecha y consigue más que otros mediante triquiñuelas o engaños.

Recursos y materiales recomendados

Recursos de apoyo didácticos:

- Presentación, porcentajes y tipos.
- Proporcionalidad con batidos de cacao.

Recursos imprimibles:

- Cálculo de porcentajes de centenas exactas y semi-centenas.
- Cálculo de porcentajes mediante patrones.
- Tanto por ciento.

Recursos TIC:

- Boom proporcionalidad.

Pensamiento computacional

En esta unidad continuaremos trabajando las estrategias para producto y división de dos cifras estudiadas en la anterior.

- Producto:

– Producto de un decimal por décimas.
$0{,}6 \times 0{,}7 - 0{,}08 \times 0{,}9 - \ldots$

– Productos de un dígito por un bidígito con decimales.
$8 \times 2{,}3 - 9 \times 0{,}54 - \ldots$

– Extender a decenas y centenas.
$40 \times 3{,}6 - 70 \times 0{,}45 - 800 \times 6{,}3 - \ldots$

- Suma de cuatro cifras con y sin decimales con rebasamiento.
- Mitades: el dominio de las mitades (con y sin decimales) es esencial para la elaboración de las escalas.
- Resta de tres y cuatro cifras con y sin decimales con rebasamiento.

Esquema

Proporciones

Proporcionalidad

- Concepto de proporcionalidad.
- Magnitudes directamente proporcionales.
- Regla de tres directa.
- Magnitudes inversamente proporcionales.
- Regla de tres inversa.
- Diferencias entre magnitudes e identificación de las mismas.
- Fracciones y proporcionalidad.

Problemas

- Problemas de proporcionalidad (niveles I, II y III).
- Tarea competencial.

Anotaciones

PROPORCIONES

La proporcionalidad es una relación constante entre magnitudes medibles.

Estudia estas situaciones para que entiendas qué es una **relación**.

- A cada asiento del autocar le corresponde una persona. ¿Cuántas personas corresponderían a dos asientos? ¿Y a ocho asientos?
- Para hacer un bizcocho, por cada vaso de leche necesitamos medio vaso de harina. Para medio bizcocho, necesitaremos la mitad de ingredientes.

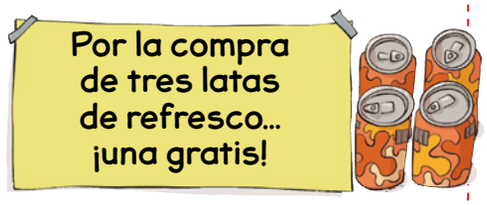
La palabra **constante** se refiere a que se mantiene siempre la misma relación. Por ejemplo, si para la masa de dos bizcochos ponemos dos vasos de leche y dos de harina, hemos roto la constancia y el bizcocho saldrá duro.

Una **magnitud** es cualquier propiedad que se pueda medir numéricamente, como la capacidad de una botella. La felicidad no es una magnitud, por ejemplo.

No todo lo que parece una proporción lo es. Observa la siguiente oferta de un supermercado y responde:

¿Cuántas latas te regalarán si compras 6 latas? ¿Y si compras 9? ¿Y por 2?

Has contestado a todas menos a la última, ya que no es una proporción. Si lo fuese, te deberían poder regalar dos tercios de lata, lo cual no hacen. Así que no te regalarían ninguna.



1 Explica qué situaciones son proporcionales y cuáles no.

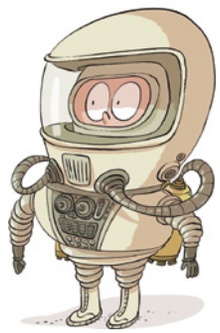
a) Receta de zumo de fruta tropical: 400 gramos de papaya, 3 naranjas, el zumo de media lima y dos hojitas de menta fresca.

b) La nave Apolo 11, con tres tripulantes, tardó tres días y siete horas en llegar a la Luna. ¿Cuánto habría tardado si fueran seis tripulantes?

c) Si en hacer un muro de 2 metros de alto por 20 metros de largo, 2 obreros tardan 2 semanas, 4 obreros tardarán la mitad.

d) ¡Oferta! Comprando tres unidades, la tercera al 50 %.

e) Cuanto más estudio, menos posibilidades de suspender tengo.



Pág. 88 Sugerencias metodológicas

Empezamos la unidad con cuestiones de vocabulario y de comprensión de términos matemáticos que interesa aclarar y que el alumnado domine para evitar confusiones que posteriormente entorpezcan la adquisición de los contenidos.

Además del ejemplo de una falsa proporción de las latas de refresco, en los comercios se suelen dar muchas situaciones similares que podemos pedir que investiguen en folletos de ofertas. A partir de ellas, podemos plantear qué nos darían por la compra del doble y de la mitad de lo que indica la oferta.

Soluciones

1. Son proporcionales: a), c) y e).
No son proporcionales: b) y d).

Magnitudes directamente proporcionales

Dos magnitudes son directamente proporcionales cuando al aumentar o disminuir una de ellas, la otra aumenta o disminuye en la misma proporción.

Observa estos ejemplos de proporcionalidad directa:

N.º DE PERSONAS	N.º DE DEDOS DE LAS MANOS
1	10
2	20
3	30
4	40

AGUACATES	PRECIO
1 kg	4 €
2 kg	8 €
1/2 kg	2 €
1/4 kg	1 €

1 Observa las series e indica cuál es directamente proporcional y cuál no.

PRECIO DE CROMOS	
1 sobre	0,60 €
5 sobres	3 €
10 sobres	6 €

TIEMPO QUE TARDAN EN PINTAR UNA CASA	
1 pintor	6 días
2 pintores	3 días
3 pintores	2 días

PRECIO DE GASOLINA	
100 km	4,8 L
150 km	7,2 L
200 km	9,6 L

2 Observa el ejemplo y escribe en tu cuaderno la proporción en estas series proporcionales.

LO QUE GANO EN...	
2 días	90 €
4 días	180 €
5 días	225 €
Proporción: 45 €	

PRECIO DE CAMISAS	
2 camisas	50 €
4 camisas	100 €
6 camisas	150 €
...	

PRECIO DE FRESAS	
2 kg	2,70 €
5 kg	6,75 €
7 kg	9,45 €
...	

3 Completa las tablas en tu cuaderno de estas proporciones directas.

TRABAJO POR HORAS	
2 horas	8 €
3 horas	12 €
4 horas	...
5 horas	...

CANTIDAD DE HARINA POR TARTA	
1 tarta	250 g
2 tartas	...
3 tartas	...
4 tartas	...

PRECIO NOCHE DE HOTEL	
1 noche	45 €
2 noches	...
1 semana	...
8 noches	...

Anotaciones

Pág. 89 Sugerencias metodológicas

La explicación que contiene la página sobre las magnitudes directamente proporcionales es muy intuitiva y fácil de comprender por parte de los niños y las niñas. En el caso del producto o multiplicación, es sencillo deducir la proporcionalidad entre sus factores y el producto obtenido, y cómo el aumento de cualquiera de ellos supone un aumento proporcional del producto respecto a la variación producida en los factores.

En el caso de la división, la proporcionalidad directa es la que guarda el dividendo con el cociente, siempre que el divisor sea el mismo. El trabajo con patrones de la división que ya han realizado los alumnos y las alumnas les va a ayudar a comprender esta relación: si 48 : 8 = 6, el doble del dividendo dará lugar al doble del cociente, y la mitad del dividendo a la mitad del cociente. Para un ejemplo más concreto se puede utilizar el agua. «Seis alumnos van de excursión y les proporcionan 48 litros de agua. ¿Cuántos litros corresponden a cada uno? En el camino se rompe uno de los depósitos, la cantidad de agua queda reducida a la mitad. ¿Cuántos litros tendrán ahora por cabeza?»

Soluciones

1. Son directamente proporcionales las series del precio de los cromos y de la gasolina. No lo es la del tiempo que tardan los pintores.

2. Camisas: 25 €. Fresas: 1,35 €.

3.

TRABAJO POR HORAS	
2 horas	8 €
3 horas	12 €
4 horas	**16 €**
5 horas	**20 €**

CANTIDAD DE HARINA POR TARTA	
1 tarta	250 g
2 tartas	**500 g**
3 tartas	**750 g**
4 tartas	**1 000 g**

PRECIO NOCHE DE HOTEL	
1 noche	45 €
2 noches	**90 €**
1 semana	**315 €**
8 noches	**360 €**

Pág. 90 Sugerencias metodológicas

Los dos casos que se exponen en la página para la resolución de la regla de tres directa deben ser explicados a los alumnos y las alumnas haciéndoles ver que, según el tipo de información que se nos solicite, puede estar más indicado el empleo de uno u otro.

Por ejemplo, si se nos pide, como en el problema que se resuelve en la página, un múltiplo, resulta más ventajoso obrar por deducción a la unidad. «Un coche recorre a velocidad constante 240 km en 3 horas. ¿Cuántos kilómetros recorrerá en 7 horas? ¿Y en 4? ¿Y en 9? ¿Y en 12? ¿Y en 2?». Hallados los kilómetros que recorre en una hora, el problema se convierte en una simple operación de multiplicar. En puridad, aquí no hay regla de tres, ni hay que construir la relación proporcional ni transcribir esa relación en una pareja de fracciones equivalentes.

El uso de la regla de tres va a conducir a conceptos más complejos, por lo que no se debe obviar su uso y su práctica. Veamos el ejemplo propuesto en la página: «Un coche recorre a velocidad constante 240 km en 3 horas. ¿Cuántos kilómetros recorrerá en 7 horas?». Aquí tenemos un nivel de dificultad más elevado, pues hay que saber enunciar la proporción de forma adecuada y, además, entender por qué se hace así.

A los alumnos y las alumnas más aventajados se les propone que hagan un pronóstico sobre el resultado, basándose en la relación de proporcionalidad de la fracción completa. Una vez hecho ese pronóstico, pueden comprobar su nivel de aproximación utilizando la calculadora. Con el ejemplo que se ha mostrado, tendríamos que las dos fracciones serían $\frac{3}{7} = \frac{240}{x}$. ¿Qué proporción guarda 7 respecto a 3? Se plantean aquí dos niveles de exigencia:

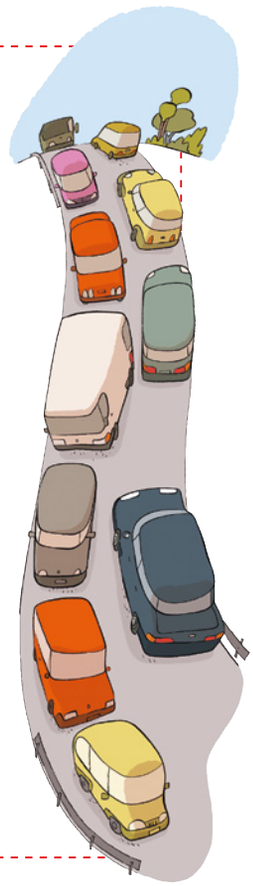
1. **Nivel de simple estimación.** Es algo más del doble, luego el número que hace de denominador de la segunda fracción debe ser algo mayor que el doble de 240. Un resultado aceptable sería que el coche en siete horas recorre alrededor de 500 o 525 kilómetros.
2. **Nivel de precisión.** Un escolar muy preciso se puede dar cuenta de que el denominador (7) es el doble de 3 partes más una parte (3 + 3 + 1), por lo que halla el doble y una parte y tiene el resultado completo: 560 km.

Regla de tres directa

En las magnitudes directamente proporcionales existe una relación que se mantiene fija. Por eso, su relación se puede expresar con fracciones equivalentes, donde el producto cruzado de numeradores con denominadores es igual:

$$\frac{3}{5} = \frac{15}{25}$$

Si en la anterior pareja de fracciones faltara un dato (un numerador o un denominador), se podría averiguar a través de dos procedimientos. Observa:



Un coche recorre, a velocidad constante, 240 km en 3 horas. ¿Cuántos kilómetros recorrerá en 7 horas?

CASO 1: Reduciendo a la unidad

1. Calculamos el recorrido en 1 hora: **240 km: 3 horas = 80 km/hora**
2. Multiplicamos la unidad (lo recorrido en una hora) por la cantidad que buscamos: **80 km/h × 7 h = 560 km**

CASO 2: Regla de tres

El problema plantea una proporción directa: a más horas de viaje recorrerá más kilómetros.

1. Expresamos las proporciones: $\frac{3}{7} = \frac{240}{x}$

   Es decir, la cantidad de kilómetros recorridos debe estar en la misma proporción que están las 3 horas respecto a las 7 horas.
2. Calculamos:
   - Primer denominador por segundo numerador: 240 × 7 = 1 680
   - Producto obtenido dividido por el primer numerador: 1 680 : 3 = 560 km

1. Dos coches iguales valen 23 000 € los dos juntos. Contesta utilizando la regla de tres. ¿Cuánto valen cinco coches como los anteriores?

2. Observa la siguiente tabla y aplica la regla de tres.

JUGADOR	TIROS A PUERTA	GOLES
María	4	2
Pedro	8	2
Irene	2	1
Javier	8	4

a) ¿Qué jugadores han marcado goles en la misma proporción?

b) Marta ha tirado a puerta 12 veces. ¿Cuántos goles debería marcar para tener la misma efectividad que María? ¿Y para tener la misma efectividad que Javier?

Veamos otro ejemplo: seis billetes de avión cuestan 840 €. ¿Cuánto costarán 26 billetes?

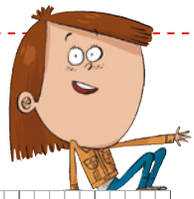
1. Simple estimación: $\frac{6}{26} = \frac{840}{x}$. Será cuatro veces y un poco más: sobre 3 500 €.
2. Precisión: 26 es cuatro veces seis más su tercera parte. Si cuatro veces seis son 3 360 y la tercera parte de 840 es 280, el resultado es 3 640 €.

Actividades de ampliación

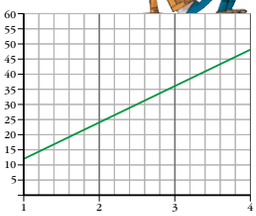
1. Un avión tarda 1 h y 15 min en realizar el vuelo entre Granada y Barcelona, a una velocidad media de 900 km/h. ¿Cuánto tardaría si la velocidad media fuera de 1 100 km/h?

Introducción a la proporcionalidad inversa

Esta tabla recoge el tiempo que dedica un adolescente a un juego de Internet y el coste económico que conlleva. Al lado está su representación gráfica:

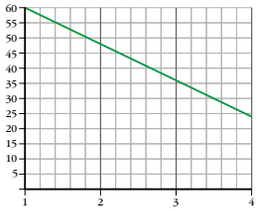


MESES	COSTE
1 mes	12 €
2 meses	24 €
3 meses	36 €
4 meses	48 €



Esta otra tabla recoge el mismo tiempo dedicado a jugar en Internet y el dinero que tiene ahorrado.

MESES	AHORROS
1 mes	60 €
2 meses	48 €
3 meses	36 €
4 meses	24 €



1. ¿Qué diferencia ves entre los dos gráficos?

2. ¿Cómo varía el dinero según pasa el tiempo?

3. Indica en tu cuaderno lo que debe ocurrir en estas situaciones para que mientras en una aumenta, en la otra disminuya, o viceversa.

   a) Tardo cuatro días en terminar un trabajo…
   Si quiero acabar antes, debo…

   b) En un supermercado, para disminuir la espera para pagar, deben…

   c) Un restaurante solo tiene un camarero…
   Si quiere atender a más clientes...

   d) Vamos de excursión 25 alumnos y alumnas…
   Para que el autobús de 60 plazas salga más barato…

Anotaciones

Pág. 91 Sugerencias metodológicas

Hacer ver al alumnado cómo, partiendo de una situación común, la proporcionalidad puede ser directa o inversa según sea una u otra la otra magnitud que midamos. Así, en el ejemplo, se compara el tiempo que estamos conectados a Internet. El gráfico es distinto, según lo comparemos con el dinero que pagamos por el tiempo de conexión o con la cantidad de dinero que nos va quedando de nuestros ahorros.

Esta misma visión podrán aplicarla a otras situaciones que les permitan dominar el concepto de proporcionalidad.

2. Un grifo llena un depósito de 80 litros en 20 min. ¿Cuánto tardaría en llenar una bañera cuya capacidad es de 400 litros?

Soluciones

1. Tardaría 1 h 1 min y 21 s.
2. Tardaría 1 h y 40 min.

Soluciones

1. Cinco coches valen 57 500 €.

2. a) María, Irene y Javier.
b) 6 goles. También 6 goles. La efectividad de María y Javier es la misma.

Soluciones

1. En el gráfico superior, el dinero a pagar aumenta en función del tiempo de juego. En el inferior, los ahorros disminuyen según aumenta el tiempo de juego.

2. El dinero a pagar aumenta según el tiempo de conexión, mientras el dinero ahorrado disminuye.

3. a) Debo pedir ayuda.
b) Deben abrir más cajas.
c) Deberá contratar más camareros.
d) Debemos aumentar el número de alumnos y alumnas.

Anotaciones

Proporcionalidad inversa

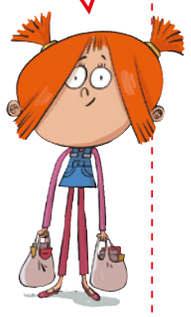
Se empaquetan 24 kg de lentejas en bolsas de distintos tamaños. En esta tabla, mostramos la relación entre la masa y el número de paquetes:

TAMAÑO DE LAS BOLSAS	1 kg	2 kg	3 kg	4 kg	6 kg	8 kg
NÚMERO DE PAQUETES	24	12	8	6	4	3

Si la bolsa es de 24 kg, se necesita 1 bolsa.
Si la bolsa es de 12 kg, se necesitan 2 bolsas.

$$\frac{24\text{ kg}}{12\text{ kg}} = \frac{1\text{ bolsa}}{2\text{ bolsas}}$$

Es una proporción inversa: a mayor tamaño, menor número de bolsas.



Dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando al aumentar una, disminuye la otra en la misma proporción. En ella, el producto de los numeradores es igual al producto de los denominadores.

$$\frac{24}{12} = \frac{1}{2}$$

Producto numeradores → $24 \times 1 = 24$

Producto denominadores → $12 \times 2 = 24$

Para averiguar el término que falta en una regla de tres inversa, se multiplican los términos iguales (numeradores o denominadores) y el resultado se divide entre el término que queda.

2 obreros hacen una pared en 8 horas. ¿Cuánto tardarán 4 obreros?

$$\frac{2}{4} = \frac{8}{x}$$

Producto de numeradores → $2 \times 8 = 16$
División por el denominador → $16 : 4 = 4$
Cuatro obreros tardarán 4 horas.

BASE DE LA PROPORCIÓN	PROPORCIONALIDAD DIRECTA	PROPORCIONALIDAD INVERSA
$\frac{2}{4} = \frac{8}{16}$	$\frac{2}{4} : \frac{8}{16}$	$\frac{2}{4} \times \frac{8}{4}$

1. Construye la tabla de proporcionalidad con estos datos. ¿Cuánto tiempo tarda en recorrerse una distancia de 120 km si la velocidad media es de 30 km/h? ¿Y si es de 40 km/h? ¿Y si es de 60 km/h? ¿Y si es de 120 km/h?

2. Completa esta tabla en tu cuaderno. ¿Cuánto tardarían 32 obreros? ¿Y un obrero?

N.º DE OBREROS	1	2	4	8	16	32
HORAS NECESARIAS	…	8	4	2	1	…

Pág. 92 Sugerencias metodológicas

Se presenta la proporcionalidad inversa, con ejemplos muy sencillos y pertenecientes a la experiencia diaria de los niños y las niñas. Desde un punto de vista más formal, el docente puede recurrir al modelo de la división que se había explicado en la unidad anterior. Recordamos:

Proporcionalidad directa. La que existe entre el dividendo y el cociente, dejando fijo el divisor: 24 : 6 = 4; 48 : 6 = 8.

Proporcionalidad inversa. La que existe entre el divisor y el cociente, dejando fijo el dividendo: 48 : 6 = 8; 48 : 12 = 4.

Es muy importante determinar la base de la proporción, que siempre es la igualdad entre dos fracciones equivalentes. A partir de ella, el tipo de proporción exigirá que, en el caso de la proporción directa, se dividan ambas fracciones, y en el caso de la inversa, que se multipliquen.

Soluciones

1.

VELOCIDAD	30 km/h	40 km/h	60 km/h	120 km/h
TIEMPO	4 h	3 h	2 h	1 h

2.

N.º DE OBREROS	1	2	4	8	16	32
HORAS NECESARIAS	**16**	8	4	2	1	**1/2**

3 Observa la tabla siguiente y responde a las preguntas en tu cuaderno. No te olvides de escribir la operación que haces cada vez para hallar los resultados.

N.º DE EXCAVADORAS	1	2	3	4	6	8
DÍAS QUE TARDAN	24	12	8	…	…	…

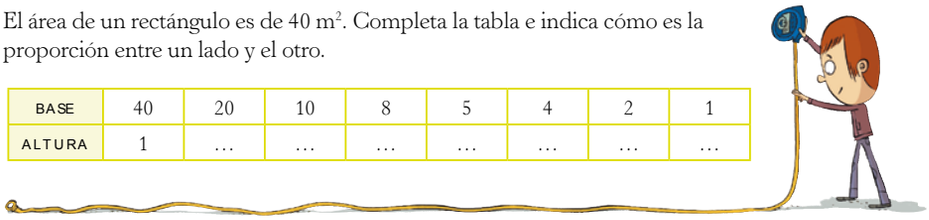
a) ¿Cuántos días tardan 4 excavadoras en hacer la misma zanja?

b) ¿Y 6 excavadoras?

c) ¿Y 8 excavadoras?

4 El área de un rectángulo es de 40 m^2. Completa la tabla e indica cómo es la proporción entre un lado y el otro.

BASE	40	20	10	8	5	4	2	1
ALTURA	1	…	…	…	…	…	…	…



5 Carlos estudia fuera de casa, y tiene 450 € para gastos. Construye una tabla indicando cuánto se puede gastar al día si quiere que el dinero le dure 30 días, 15 días, 10 días y 5 días.

DÍAS	30	…	…	…
GASTO DIARIO	…	…	…	…

¿Cómo es la proporción entre el dinero que se puede gastar cada día y el número de días que le dura la cantidad?

6 En la granja han comprado pienso para alimentar a 1 500 gallinas durante 20 días. Responde a las siguientes preguntas.

a) ¿Para cuántos días habría pienso si las gallinas fueran 2 000?

b) ¿Y si fueran 1 200 gallinas?

c) Comiendo cada gallina la misma cantidad, ¿cuántas podrían ser alimentadas en 10 días?

d) ¿Y en 60 días?

Anotaciones

Pág. 93 Sugerencias metodológicas

Las sugerencias metodológicas son las mismas de la página anterior. Entre la anterior y la presente se recogen seis problemas que entrenan a los alumnos y las alumnas en la resolución de ejercicios de proporcionalidad.

Soluciones

3. Divido los 24 días por el número de excavadoras.

N.º DE EXCAVADORAS	1	2	3	4	6	8
DÍAS QUE TARDAN	24	12	8	**6**	**4**	**3**

4. La proporcionalidad es inversa.

BASE	40	20	10	8	5	4	2	1
ALTURA	1	**2**	**4**	**5**	**8**	**10**	**20**	**40**

5. La proporcionalidad es inversa.

NÚMERO DE DÍAS	30	15	10	5
GASTO DIARIO	15 €	30 €	45 €	90 €

6. a) Habría pienso para 15 días.

b) Habría pienso para 25 días.

c) Podrían alimentar a tres mil gallinas.

d) Podrían alimentar a quinientas gallinas.

Anotaciones

Regla de tres inversa

Ya sabes que la proporción inversa es aquella en la que mientras un magnitud crece, la otra decrece. Ahora vamos a ver cómo realizar los cálculos a través de una regla de tres inversa.

Partimos de un ejemplo:

Dos mangueras riegan completamente un jardín en 21 minutos con el agua de un depósito. Si en lugar de 2 mangueras, ponemos 3 conectadas al mismo depósito, ¿cuántos minutos tardarán en regar el mismo jardín?

El problema plantea una proporción inversa: cuantas más mangueras, menos tiempo se tarda en regar.

1. Expresamos las proporciones: $\frac{2}{3} = \frac{21}{x}$.
   Como la proporción es inversa, podemos dar la vuelta a una de las fracciones, o multiplicar los numeradores y dividir por el único denominador.
2. La proporción inversa queda así: $\frac{2}{3} = \frac{x}{21}$.
3. Calculamos:
   - Denominador primero por numerador segundo: $2 \times 21 = 42$
   - Producto obtenido entre numerador primero: $42 : 3 = 14$
4. La respuestas es que con 3 mangueras reducen el tiempo de riego a 14 minutos.

1. Para transportar el trigo de un almacén necesitan llenar 80 sacos de 12 kg cada uno. Si los sacos tuvieran una capacidad de 20 kg, ¿cuántos sacos necesitarían para transportar la misma cantidad de trigo?

2. Si con 90 kg de trigo tenemos para alimentar un gallinero con 40 gallinas durante 30 días, ¿para cuantos días tendremos alimento si vendemos 15 de las gallinas?

3. Según el presupuesto del arreglo de la cocina de mi casa, 3 albañiles tardarían 6 días. ¿Cuánto tiempo tardarían en hacer el mismo trabajo 2 albañiles?

4. Si quiero que el arreglo de la cocina de mi casa acabe en solo 3 días. ¿Cuántos albañiles serían necesarios si 3 lo hacen en 6 días?

5. Mi padre sigue con el presupuesto de la cocina y ha pensado no hacerlo tan deprisa para que le salga más barato. Ahora quiere saber que si 3 albañiles hacen el trabajo en 6 días, ¿cuántos albañiles serían necesarios para acabar el trabajo en 10 días?

Pág. 94 Sugerencias metodológicas

Ejercicio 1. Es posible que haya alumnos que no lo resuelvan siguiendo el procedimiento de la proporcionalidad inversa, sino que calculen el total de kilos de trigo (960) y, hallado este dato, lo dividen agrupando los 960 kg en montones de 20 kg, que son los que se corresponden con la nueva capacidad de los sacos. No se debe dar el problema como mal resuelto, pero sí hacerles ver que el procedimiento que han seguido es el mismo que si hubieran aplicado la fórmula de la proporcionalidad inversa.

Ejercicio 2. Aunque parece un problema de regla de tres inversa y compuesta, no lo es. Sí es una proporción inversa, pero no es compuesta. Hay que advertir a los niños que el dato de los 30 días no juega ningún papel en la resolución, puesto que no cambia ese período de tiempo se hayan vendido o no las gallinas.

Ejercicio 3. Si los alumnos han entendido bien la relación proporcional inversa, este ejercicio puede ser un buen testigo de ello. El docente puede invitar a los niños a que lo hagan deprisa, y que den el resultado. En el caso de discrepancias en el resultado, se debe invitar a los alumnos a que expliquen lo que han hecho y por qué. Se pueden llevar grandes sorpresas.

Ejercicio 4. Recomendamos al docente que, antes de resolver el ejercicio, comparen el enunciado con el ejercicio 3 anterior, y que una vez visto el enunciado y el resultado aborden la resolución de este problema.

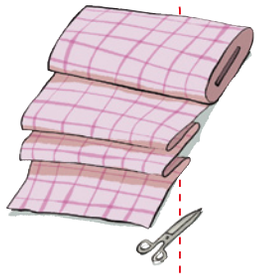
Ejercicio 5. En el resultado no salen albañiles «completos», sino que se obtiene un albañil y 0,8. El docente debe invitar a los niños a que, dada la imposibilidad de trocear al albañil, se calculen los días que tiene que trabajar el albañil «incompleto» para que la obra se haga en diez días. Es decir, que conviertan el decimal 0,8 en días de trabajo. La solución es muy sencilla, puesto que por un lado tenemos ocho décimas y por el otro diez días.

Soluciones

1. Respuesta 48 sacos.
2. Respuesta: para 120 días.
3. Respuesta: 9 días.
4. Respuesta: 6 albañiles.
5. Aunque aparentemente parece un problema de regla de tres inversa, en realidad no es posible, ya que la solución sería 1,8 albañiles.

Diferencia entre proporcionalidad directa e inversa

Ante una misma situación, la proporción puede ser directa o inversa según lo que queramos saber. Por ejemplo:



Unas piezas de tela vienen en bobinas de 36 metros. El precio del metro de la bobina depende de la calidad de la misma y pueden cortarse más o menos trozos de distinta medida.

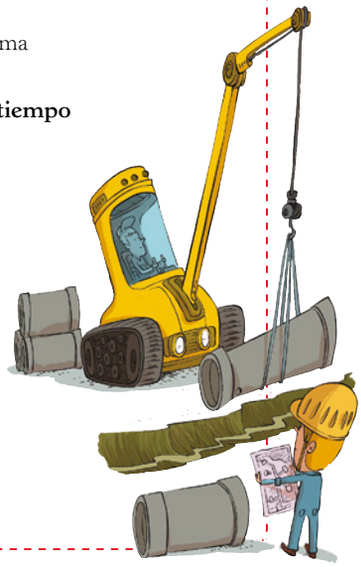
- **Será proporcionalidad directa**

  Si preguntamos por el precio. A mayor calidad de la tela, mayor precio. A menor calidad, menor precio.

- **Será proporcionalidad inversa**

  Si preguntamos por la medida de los retales y la cantidad. De la misma bobina, a más retales, menor tamaño de cada uno, y al contrario.

Unos obreros abren una zanja para poner tuberías del gas y el tiempo que tardarán.



- **Será proporcionalidad directa**

  Dos personas cavan cuatro metros de zanja en dos horas. ¿Cuántos metros cavan en seis horas?

  $\frac{2}{6} = \frac{4}{x} \rightarrow 6 \times 4 = 24 \rightarrow 24 : 2 = 12$ Cavan 12 metros.

- **Será proporcionalidad inversa**

  Si dos personas cavan ocho metros de zanja en cuatro horas, ¿cuánto hubieran tardado ocho personas en cavar el mismo tramo de zanja?

  $\frac{2}{8} = \frac{4}{x} \rightarrow 2 \times 4 = 8 \rightarrow 8 : 8 = 1$

  8 personas hubieran tardado 1 hora.

1 De las siguientes situaciones, crea un problema de proporcionalidad directa y otro de proporcionalidad inversa.

a) Los empleados de una empresa tienen que crear una página web en un tiempo determinado.

b) Queremos cambiar las baldosas del suelo del baño y hemos visto varios precios según la calidad y los distintos tamaños.

c) Recogida de una cosecha de frutos secos, el tamaño de las cajas que necesitaremos para recogerlas y el precio según lo que vendamos.

d) En una carrera, la posibilidad de medallas según el número de atletas de cada país y el tiempo que cada corredor haga en cada vuelta.

Anotaciones

Pág. 95 Sugerencias metodológicas

El docente debe aprovechar el estudio de las situaciones planteadas para introducir una distinción básica: que dos magnitudes tengan una relación directa o inversa, o que dos magnitudes tengan una relación **directamente** proporcional o **inversamente** proporcional. En el segundo caso, los crecimientos y decrecimientos deben guardar la misma proporción. Por ejemplo:

- A más árboles frutales, más cosecha. Pero no hay una proporción directa exacta, porque no todos los árboles producen la misma cantidad de fruta.
- A más partidos de baloncesto jugados, más posibilidades de acumular muchos puntos. Hay una relación directa, pero no hay proporción porque en todos los partidos no se consigue el mismo número de puntos.
- La edad de una persona y las horas de sueño. Un bebé puede dormir 16 horas, y una persona mayor no pasar de 4 o 5 horas de sueño. Es una relación inversa, pero no proporcional.

Se puede invitar a los niños y las niñas a que descubran nuevas situaciones que permitan inferir los dos tipos de proporciones.

Soluciones

1. Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) PD. El número de empleados y el número de horas trabajadas. PI. El número de empleados y el número de días.

b) PD. Tamaño de las losas y su precio. PI. Tamaño de las losas y la cantidad necesaria.

c) PD. El precio de venta según la cosecha. PI. El número de envases en función de su tamaño.

d) PD. Mayor probabilidad de medallas con mayor número de atletas. PI. Velocidad del corredor y tiempo en realizar una vuelta.

Anotaciones

Identificar magnitudes

- **Magnitud directamente proporcional**

  Por ejemplo, la cantidad de un producto y el precio del mismo.

- **Magnitud inversamente proporcional**

  Por ejemplo, el tiempo que tarda un depósito de agua en vaciarse y el número de personas que beben de él.

- **No tienen relación**

  Por ejemplo, el color de los ojos y la estatura de una persona.

1 Escribe en tu cuaderno de qué tipo de magnitud proporcional se trata en cada caso.

a) El peso de una persona y la talla de la ropa que usa.

b) La cantidad de azulejos para una cocina y el tamaño de los azulejos.

c) El número de días para alimentar al ganado con una cantidad de pienso.

d) La altura de una casa y la sombra que proyecta.

e) El número de grupos de alumnos y alumnas del colegio y las calificaciones que obtienen al final de curso.

f) La edad de una persona y el precio de la ropa que lleva.

g) La longitud del radio de una rueda y los metros que recorre esta en cada vuelta.

h) Las botellas que caben en una caja y el diámetro de cada botella.

i) Los goles que ha marcado un equipo de fútbol y las victorias que ha conseguido.

j) El tiempo que tarda un atleta en dar una vuelta a la pista de atletismo y el número de atletas que hacen ese recorrido.

k) Las horas que tardan varios obreros en hacer un trabajo y el número de obreros.

l) El coste en refrescos y en comida para una fiesta y los amigos que participan en ella.

m) El número de excursionistas y los autobuses que necesitarán.

n) El número de excursionistas y el número de kilómetros que harán en el autobús.

ñ) El número de excursionistas y lo que pagarán por alquilar un autobús.

Pág. 96 Sugerencias metodológicas

La totalidad del contenido de la página se centra en identificar relaciones entre magnitudes y comprobar si son proporcionales o no lo son, y en caso de que sí lo fueran, si esa proporcionalidad es directa o inversa. En cada una de las quince situaciones que se plantean, el docente debe estar atento a que los alumnos y las alumnas expliquen las razones por las cuales han tipificado la proporcionalidad o no proporcionalidad en la relación de magnitudes.

Soluciones

1. a) No hay proporción.

b) Proporcionalidad inversa.

c) Proporcionalidad inversa.

d) Proporcionalidad directa.

e) No hay proporción.

f) No hay proporción.

g) Proporcionalidad directa.

h) Proporcionalidad inversa.

i) No hay proporción.

j) No hay proporción.

k) Proporcionalidad inversa.

l) Proporcionalidad directa.

m) Proporcionalidad directa.

n) No hay proporción.

ñ) Proporcionalidad inversa.

Fracciones y proporcionalidad

Un corredor durante su entrenamiento ha realizado varias series de vueltas al estadio. En todas las series ha mantenido el mismo ritmo. ¿Cómo averiguamos los datos que nos faltan en la tabla?

N.º DE VUELTAS	TIEMPO
8	12 min
x	15 min
6	x

Lo primero de todo es averiguar si es una proporción directa o inversa. Cuantas más vueltas da, más tiempo tarda, y como el ritmo ha sido el mismo se mantienen las proporciones. Por lo tanto, es directa.

- Para calcular las vueltas que ha dado en 15 minutos, la proporción es:
  $\frac{8}{x} = \frac{12}{15}$, por tanto, $8 \times 15 = 120$; $120 : 12 = 10$ vueltas
- Para calcular el tiempo que ha tardado en dar 6 vueltas, la proporción es:
  $\frac{8}{6} = \frac{12}{x}$, por tanto, $6 \times 12 = 72$; $72 : 8 = 9$ minutos

Estamos haciendo un mural en clase para el Día de la Paz. Observa en la tabla cómo varía el tiempo que tardamos según el número de compañeros y compañeras en cada grupo. ¿Cómo averiguamos los datos que nos faltan en la tabla?

N.º DE ALUMNOS	TIEMPO
2	120 min
4	60 min
6	x
x	30 min

De nuevo, averiguamos si es una proporción directa o inversa. Cuantos más estudiantes, menos tardan. Por lo tanto, es inversa.

- Para calcular el tiempo que tardarían 6 estudiantes:
  $\frac{4}{6} = \frac{60}{x}$, por tanto, $4 \times 60 = 240$; $240 : 6 = 40$ minutos
- Para calcular el número de estudiantes que han tardado 30 min:
  $\frac{4}{x} = \frac{60}{30}$, por tanto, $4 \times 60 = 240$; $240 : 30 = 8$ estudiantes

Recuerda

En la proporcionalidad inversa y en la regla de tres inversa, el producto de los numeradores es igual al producto de los denominadores.

$\frac{2}{4} = \frac{120}{60}$ donde $\begin{cases} 2 \times 120 = 240 \\ 4 \times 60 = 240 \end{cases}$

1 Halla el término que falta en las siguientes parejas de fracciones, sabiendo que en la primera fila la proporcionalidad es inversa y en la segunda es directa.

Proporcionalidad inversa: a) $\frac{2}{4} = \frac{x}{1}$ b) $\frac{3}{6} = \frac{4}{x}$ c) $\frac{2}{5} = \frac{x}{4}$ d) $\frac{4}{6} = \frac{9}{x}$

Proporcionalidad directa: e) $\frac{2}{5} = \frac{4}{x}$ f) $\frac{2}{4} = \frac{x}{6}$ g) $\frac{x}{8} = \frac{6}{4}$ h) $\frac{x}{3} = \frac{12}{9}$

Anotaciones

Pág. 97 Sugerencias metodológicas

Se sistematiza el uso de las fracciones para expresar las proporciones. Se recuerda que a través de las fracciones se expresa la base de la proporción, y que esta representa la equivalencia de ambas fracciones. Para hallar el término que falta, el camino se bifurca, como ya se ha visto: en la proporcionalidad directa hay que dividir las fracciones, mientras que en la inversa hay que multiplicarlas.

Soluciones

1. a) 2 b) 8 c) 10 d) 12
e) 16 f) 3 g) 12 h) 4

Anotaciones

RESUELVO PROBLEMAS

Problemas de proporcionalidad: nivel I

Sigo los pasos y resuelvo el problema

1 Una profesora particular cobra 60 € por 3 horas de trabajo. ¿Cuánto cobraría por 8 horas?

1. Construye la tabla de proporcionalidad.

3 horas	60 €
8 horas	…

2. Aplica la proporcionalidad directa o inversa y resuelve.
3. Analiza y comprueba el resultado.

2 10 estibadores tardan 12 horas en cargar un barco. ¿Cuántos estibadores serían necesarios para cargar el barco en 8 horas?

1. Construye la tabla de proporcionalidad.

12 horas	10 estibadores
8 horas	…

2. Aplica la proporcionalidad directa o inversa y resuelve.
3. Analiza y comprueba el resultado.

Resuelvo problemas

3 Un coche ha tardado 30 minutos en recorrer 70 km a una velocidad constante. Si mantuviese la misma velocidad, ¿cuánto tiempo tardaría en recorrer 120 km?

4 En el comedor escolar se guarda comida suficiente para dar de comer a 120 niños y niñas durante 15 días. ¿Cuánto duraría la misma cantidad de comida si tuviésemos que dar de comer a 180 niños y niñas?

5 En una fábrica de zumos, una máquina llena 2 800 botellas en 40 minutos. ¿Cuántas botellas llenará en 2 horas?

6 Un camión que puede transportar en cada viaje 6 toneladas, necesita 18 días para trasladar toda la mercancía. ¿Cuántos días tardaría otro camión, a la misma velocidad, pero que pueda transportar en cada viaje 9 toneladas?

Invento, creo y razono

7 Inventa un problema de proporcionalidad inversa a partir de los siguientes datos.

16 obreros	8 horas	12 obreros

Pág. 98 Sugerencias metodológicas

Primera aproximación sistemática a los problemas de proporcionalidad. Se pretende que el alumnado identifique y aplique la proporcionalidad directa o inversa según corresponda. Para ello, se ofrecen una serie de pautas en el encabezado que tienen el objetivo de ayudar al alumnado a afrontar este tipo de situaciones. La estrategia fundamental se centra en construir una tabla de proporcionalidad. Posteriormente el docente puede aprovechar la tabla y transformarla en las correspondientes fracciones equivalentes. Sin embargo, en algunos casos, también pueden resolver las situaciones planteadas aplicando la reducción a la unidad. Algunas de las situaciones de proporcionalidad directa planteadas ya fueron trabajadas en cursos anteriores como PAEV2 de compartir la parte y se resolvían hallando la pregunta oculta.

Soluciones

1. Proporcionalidad directa.

3 horas	60 €
8 horas	¿?

$\frac{3}{8} = \frac{60}{x}$ $60 \times 8 = 480$ $480 : 3 = 160$ € por ocho horas

2. Proporcionalidad inversa.

12 horas	10 estibadores
8 horas	¿?

$\frac{12}{8} = \frac{10}{x}$ $12 \times 10 = 120$ $120 : 8 = 15$ estibadores.

3. Proporcionalidad directa. Tardará 40 minutos.

$\frac{90}{120} = \frac{30}{x}$ $120 \times 30 = 3\,600$ $3\,600 : 90 = 40$ minutos.

4. Proporcionalidad inversa. Duraría 10 días.

$\frac{120}{180} = \frac{15}{x}$ $120 \times 15 = 1\,800$

5. Proporcionalidad directa. Llenará 8 400 botellas.

$\frac{40}{120} = \frac{2\,800}{x}$ $2\,800 \times 120 = 336\,000$

6. Proporcionalidad inversa. Tardaría 12 días.

$\frac{6}{9} = \frac{18}{x}$ $6 \times 18 = 108$ $108 : 9 = 12$ días.

7. Respuesta abierta.

$1\,800 : 180 = 10$ días $336\,000 : 40 = 8\,400$

Establecer proporciones

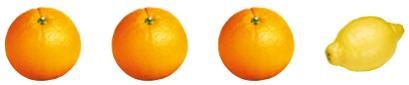
El lenguaje matemático es rico y diverso. Observa cómo expresamos lo mismo de diferente forma hasta establecer la proporción en forma de escala.

El número de dardos es 4 veces el número de dianas.

El número de dianas es $\frac{1}{4}$ del número de dardos.

Por cada diana hay 4 dardos. La proporción es 1:4.

1 Empieza por un caso sencillo y completa en tu cuaderno siguiendo el ejemplo del encabezado.



El número de naranjas es … veces el número de limones.

El número de limones es $\frac{\ldots}{\ldots}$ del número de naranjas.

Por cada limón hay … naranjas. La proporción es … : …

2 Ahora un poco más difícil.

El número de balones es … veces el número de bolsas de deporte.

El número de bolsas de deporte es el $\frac{\ldots}{\ldots}$ del número de balones.

Por cada bolsa de deporte, hay … balones. La proporción es … : …

El número de aves es … veces el número de nidos.

El número de nidos es $\frac{\ldots}{\ldots}$ del número de aves.

Por cada nido hay … aves. La proporción es … : …

Anotaciones

Pág. 99 Sugerencias metodológicas

Se pretende en esta página establecer conexiones entre la comparación en términos multiplicativos (veces), en forma de fracción y en forma de proporción (escala). Se busca que el alumnado conecte diferentes expresiones matemáticas que expresan lo mismo.

En el ejercicio 1 se propone un caso muy sencillo con el que practicar estos contenidos. En el ejercicio 2 la dificultad aumenta. Por ello, se recomienda que el alumnado rodee los balones que meteríamos en cada saco para establecer la comparación en número de veces. Superada esta primera dificultad, el resto del ejercicio será más sencillo.

Soluciones

1. El número de naranjas es 3 veces el número de limones.

El número de limones es $\frac{1}{3}$ del número de naranjas.

Por cada limón hay 3 naranjas. La proporción es 1:3.

2. El número de pelotas es 4 veces el número de sacos.

El número de sacos es el $\frac{1}{4}$ del número de pelotas.

Por cada saco, hay 4 balones. La proporción es 1:4.

El número de aves es dos veces (el doble que) el número de nidos.

El número de nidos es $\frac{1}{2}$ del número de aves.

Por cada nido hay 2 aves. La proporción es 1:2

Anotaciones

RESUELVO PROBLEMAS

Problemas de proporcionalidad: nivel II

Sigo los pasos y resuelvo el problema

1 Llegan los carnavales y en clase han surgido dos alternativas: disfrazarse de superhéroes o de personajes históricos. Tras las votaciones, ha ganado la opción de superhéroes con una proporción de 5:2. Si 15 personas eligieron el disfraz de superhéroes, ¿cuántas personas votaron por el segundo disfraz? ¿Cuántas personas participaron en total en la votación?

1. Elabora un esquema y averigua cuántas personas representan a una parte.

   5 partes = 15 personas 2 partes = …

   … : … = … personas en una parte

2. Sabiendo el valor de una parte, calcula las personas que votaron por el segundo disfraz.
3. Finalmente, calcula las personas que participaron en la votación.

Resuelvo problemas

2 Una vez elegido el disfraz, nos centramos en su coste. La proporción del coste del disfraz con respecto a los complementos es de 6:2. Si el disfraz cuesta 24 €, ¿cuánto cuestan los complementos? ¿Cuál es el coste total de todo?

3 Viendo el alto coste del disfraz, uno de los padres ha decido confeccionarlo él mismo. La proporción del tiempo que ha tardado en coser el disfraz con respecto a confeccionar los complementos es de 7:3. Si ha tardado 3 horas y media en coser el disfraz, ¿cuánto tiempo ha tardado en tenerlo todo preparado?

4 Finalmente, llegó el gran día. La proporción de padres y madres del colegio que han asistido a presenciar el carnaval es de 4:6. Si han asistido 120 padres, ¿cuántas madres más que padres han ido?

Invento, creo y razono

5 Inventa un problema similar a alguno de los presentados en esta página a partir de este esquema y resuélvelo.

12 disfraces …

100

Pág. 100 Sugerencias metodológicas

Se presentan en esta página nuevos problemas de proporcionalidad. Se pretende que, conocida la proporción y una de las partes, se pueda hallar la otra parte, el total o la diferencia entre ambas partes.

Se le ofrecen al alumnado en el encabezado unas directrices básicas para que aprenda a resolver este tipo de problemas. El escollo principal reside en hallar el valor de una parte. Para ello, el docente puede utilizar un esquema o representación gráfica que ayude al alumnado a calcular dicho valor. Una vez superada esta parte, el resto son situaciones que de una forma u otra ellos ya han resuelto anteriormente cuando trabajaron PAEV2. Es importante que el docente perciba la conexión existente entre este tipo de problemas y los PAEV2 de la categoría de Doble Inclusión.

Soluciones

1. 15 : 5 = 3 personas /parte

3 × 2 partes = 6 personas votaron por el segundo disfraz.

15 + 6 = 21 personas participaron en la votación.

2. 24 : 6 = 4 € una parte

4 × 2 = 8 € los complementos

24 + 8 = 32 € coste total.

3. Tres horas y media = 210 minutos

210 : 7 = 30 minutos/parte

30 × 3 = 90 minutos hacer los complementos

90 + 210 = 300 minutos en total.

4. 120 : 4 = 30 padres/una parte

30 × 6 = 180 madre

180 − 120 = 60 madres más.

5. Respuesta abierta.

Problemas de proporcionalidad: nivel III

Sigo los pasos y resuelvo el problema

1 A Mateo y a Álex les encanta el dibujo. Entre los dos han hecho 65 dibujos. La proporción de los dibujos realizados por Mateo con respecto a los de Álex es de 3:2. ¿Cuántos dibujos ha hecho cada uno?

1. Elabora un esquema y averigua cuántas partes representan el total.

   3 partes de Mateo + 2 partes de Álex = 5 partes en total.

2. Halla el valor de una sola parte. … : … = …
3. Sabiendo el valor de una parte, calcula los dibujos elaborados por Álex.
4. Finalmente, calcula los dibujos realizados por Mateo.

Resuelvo problemas

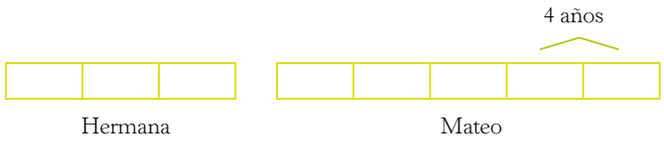
2 A la hermana de Mateo le encanta hacer *lettering*. Por ello, se ha comprado dos cajas nuevas de rotuladores por 98 €. La proporción del precio de la caja A respecto de la B es de 3:4. ¿Cuánto dinero le ha costado la caja A? ¿Y la B?

3 Mateo lleva todo el día trabajando con dos diseños sobre un personaje de cómic nuevo que ha creado. En total ha tardado 5 horas y media en terminarlos. La proporción del tiempo dedicado al primer diseño respecto del segundo es de 7:4. ¿Cuánto tiempo ha tardado en elaborar cada diseño?

4 Mateo y Álex se han apuntado a un concurso de dibujo. En total hay 150 participantes. La proporción de chicos con respecto al de chicas apuntadas es de 4:6. ¿Cuántas chicas más que chicos participan?

Invento, creo y razono

5 Mateo y su hermana tienen una diferencia de edad de 4 años. Si la proporción de la edad de Mateo respecto a su hermana es de 5:3, ¿qué edad tiene cada uno?



Anotaciones

Pág. 101 Sugerencias metodológicas

Se presentan en esta página los últimos problemas de proporcionalidad, los más complejos. Se pretende que, conocida la proporción y el total, se pueda hallar el valor de cada uno de los agentes implicados en el problema o incluso la diferencia entre ambos.

En el encabezado se le ofrecen al alumnado unas directrices básicas para que aprenda a resolver este tipo de problemas. De nuevo, el escollo principal reside en hallar el valor de una parte. Para ello, primero debemos saber cuántas partes representan al total. El docente puede recurrir a una representación gráfica que ayude al alumnado a comprender mejor esta situación.

Es importante que se perciba la conexión existente entre este tipo de problemas y los PAEV2 de la categoría de Doble Inclusión: nivel III. Son situaciones muy similares salvo que en un caso utilizamos la comparación en número de veces y en el otro la proporción.

Los problemas 1, 2 y 3 son muy similares, salvo que el problema 3 es con unidades de tiempo y es altamente recomendable que antes de empezar a resolverlo pasen las horas a minutos. El problema 4 es diferente porque se pregunta por la diferencia entre los dos agentes. Se pueden tomar dos caminos. Por un lado, se podría calcular el número de chicos y de chicas y luego hallar la diferencia o, por otro lado, se podría hallar el valor de una parte y como se diferencian en dos partes habría que multiplicarlo por 2. Finalmente, el ej. 5 es el más complejo. Se acompaña el problema de una representación gráfica que pretende ayudar al alumnado a percibir que la diferencia de edad es la clave. Sabiendo que la diferencia de edad representa a dos partes podemos hallar el valor de una parte y a partir de aquí resolver el problema.

Soluciones

1. 3 + 2 = 5 partes
65 : 5 = 13 dibujos/parte
13 × 2 = 26 dibujos /Álex
13 × 3 = 39 Mateo

2. 3 + 4 = 7 partes 98 : 7 = 14 €/parte
14 × 3 = 42 €/A 14 × 4 = 56 €/B

3. 5 horas y media = 330 minutos
7 + 4 = 11 partes 330 : 11 = 30 min/parte
30 × 7 = 210 minutos/1.º diseño 30 × 4 = 120 minutos/2.º diseño

4. 4 + 6 = 10 partes 150 : 10 = 15 participantes/parte
6 − 4 = 2 partes de diferencia
15 × 2 = 30 chicas más

5. 4 años = 2 partes 4 : 2 = 2 años/parte
2 × 5 = 10 años/Mateo 3 × 2 = 6 años/hermana.

Anotaciones

TAREA COMPETENCIAL

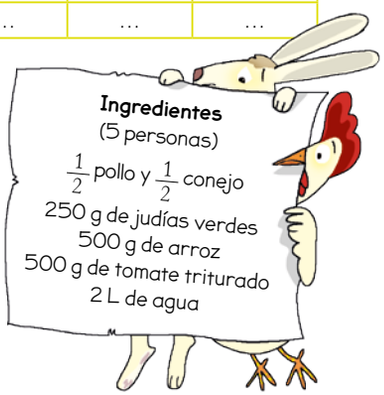
Adaptando recetas

A Lola le gustaría convertirse en una gran chef. Hasta la fecha, ha estado cocinando platos típicos siguiendo la correspondiente receta. Ahora quiere ir un paso más allá y cocinar para más gente. Para ello debe aprender a adaptar las proporciones de sus recetas. Síguela en su día a día y ayúdala a preparar su próximo banquete.

1 El primer plato que quiere adaptar es uno de sus riquísimos entrantes, una sopa. Los dos ingredientes principales de este plato (el caldo de pescado y el agua) deben mantener una proporción de 2:1. Completa la tabla de proporcionalidad hasta averiguar las tazas necesarias para dar de comer a 20 comensales.

Comensales	1	5	…	15	20
Tazas de caldo de pescado	2	10	20	…	…
Tazas de agua	1	…	…	…	…

2 A continuación, se centra en uno de sus grandes platos principales, la paella. Hasta la fecha, solo ha realizado paellas para 5 comensales, por lo que solo posee esta receta. Calcula la cantidad necesaria de cada ingrediente para realizar una paella para 20 personas.



3 De postre servirá helado casero. Adaptar la receta que tenía le ha resultado bastante sencillo. Ahora quiere servir el helado en pequeños recipientes. Elige el recipiente más adecuado para repartir 2 L de helado entre los 20 comensales que van a asistir.

Capacidad de cada recipiente	200 mL	400 mL	50 mL	100 mL	80 mL
Número de recipientes	10	…	…	…	…

4 Finalmente, Lola prepara dos tipos de galletas (con y sin chocolate) para servirlas con el café. Como suelen gustar más las galletas con chocolate, la proporción con respecto a las que no llevan chocolate será 3:2. Si quiere preparar 60 galletas en total, ¿cuántas tiene que hacer de cada tipo?

Pág. 102 Sugerencias metodológicas

Las mismas orientaciones metodológicas que la tarea competencial anterior.

Soluciones

1. Proporcionalidad directa

COMENSALES	1	5	**10**	15	20
TAZAS DE CALDO DE PESCADO	2	10	20	**30**	**40**
TAZAS DE AGUA	1	**5**	**10**	**15**	**20**

2. La proporción es 1:4, por lo que las cantidades serían las siguientes:

2 pollos y 2 conejos.

1 kg de judías verdes.

2 kg de arroz.

2 kg de tomate triturado.

8 L de agua.

3. Proporcionalidad inversa.

CAPACIDAD DE CADA RECIPIENTE	200 mL	400 mL	50 mL	100 mL	80 mL
NÚMERO DE RECIPIENTES	**10**	**5**	**40**	**20**	**25**

El recipiente más adecuado para servir a 20 personas es el de 100 mL.

4. 3 partes + 2 partes = 5 partes

60 : 5 = 12 galletas/partes

12 × 2 = 24 galletas sin chocolate

12 × 3 = 36 galletas con chocolate.

REPASO

1 Empareja en tu cuaderno fracciones para que formen proporciones inversas.

$\frac{2}{5}$ $\frac{3}{7}$ $\frac{5}{9}$ $\frac{7}{4}$ $\frac{6}{15}$ $\frac{8}{12}$

a) $\frac{21}{9}$ b) $\frac{45}{25}$ c) $\frac{18}{12}$ d) $\frac{60}{24}$ e) $\frac{56}{98}$ f) $\frac{10}{20}$

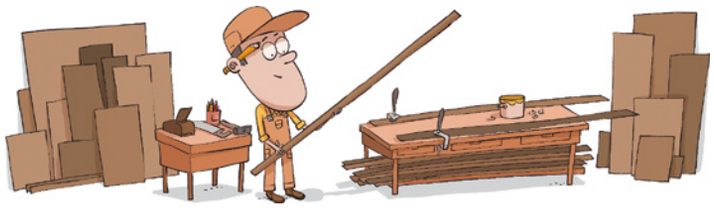
2 Indica en las siguientes parejas de proporciones cuáles son directas, inversas o no son proporciones.

a) $\frac{4}{2}$ y $\frac{7}{14}$ d) $\frac{3}{5}$ y $\frac{21}{35}$ g) $\frac{6}{9}$ y $\frac{7}{10}$ j) $\frac{21}{12}$ y $\frac{8}{7}$

b) $\frac{2}{15}$ y $\frac{4}{29}$ e) $\frac{28}{7}$ y $\frac{84}{21}$ h) $\frac{9}{3}$ y $\frac{13}{39}$ k) $\frac{8}{16}$ y $\frac{32}{16}$

c) $\frac{15}{12}$ y $\frac{45}{36}$ f) $\frac{6}{7}$ y $\frac{35}{58}$ i) $\frac{50}{20}$ y $\frac{4}{10}$ l) $\frac{18}{7}$ y $\frac{144}{56}$

3 Un carpintero necesita veinticuatro tablas de quince centímetros de anchura para recubrir el zócalo de una pared. En la carpintería, solo tienen tablas de dieciocho o de veinticuatro centímetros. Escribe las dos proporciones y halla el número de tablas necesario en cada caso.



4 Una máquina para asfaltar necesita dieciséis días para alquitranar un tramo de carretera. Cuando lleva ocho días asfaltando, viene otra máquina igual para ayudar a terminar antes. ¿Cuántos días se ahorrarán?

5 Un repartidor de paquetería gana 150 € por repartir 200 paquetes. ¿Cuánto ganará si reparte 300 paquetes?

6 Un ganadero da de comer a sus 8 vacas durante 12 días con pienso por valor de 240 €. ¿Cuánto costará darles de comer durante 30 días?

7 El ganadero ha vendido 4 vacas y quiere saber para cuántos días tendrá comida si con 240 € de pienso tiene para 12 días.

Anotaciones

Pág. 103 Sugerencias metodológicas

La página presenta un repaso de las actividades de la unidad que no requiere mayores explicaciones.

Soluciones

1. $\frac{3}{5}$ $\frac{3}{7}$ $\frac{5}{9}$ $\frac{7}{4}$ $\frac{6}{15}$ $\frac{8}{12}$

f) a) b) e) d) c)

2. a) Inversa. d) No es. g) Inversa. j) No es.
b) Directa. e) No es. h) Inversa. k) Inversa.
c) No es. f) Directa. i) Directa. l) Directa.

3. $\frac{24}{15}$ y $\frac{18}{x}$. Se necesitan 20 tablas.
$\frac{24}{15}$ y $\frac{24}{x}$. Se necesitan 15 tablas.

4. Se ahorrarán cuatro días.

5. 5. 225 €.

6. 240 € : 12 = 20 €/día.
30 días × 20 = 600 €.

7. La mitad de las vacas supondrá el doble de días de comida: 24 días.

7 PORCENTAJES

Presentación de la unidad

La unidad 7 está dedicada por entero a los porcentajes, su cálculo y los problemas que resuelve. Son pocas las unidades que se dedican a un solo contenido. Pero el hecho de que en este caso sea así está bien justificado. Los porcentajes se han convertido en un contenido clave, no solo para poder preparar los estudios posteriores de matemáticas, sino para desenvolverse en la vida. Son la forma por excelencia de comunicar información en la vida real.

Se incluye también un procedimiento especial: la igualación a cien, que es una aplicación de la técnica de los porcentajes para mejorar la estimación y la comparación entre cantidades.

No podía faltar en la Unidad la relación entre porcentajes y fracciones, que ya habían trabajado los alumnos y las alumnas en cursos anteriores: una fracción de denominador cien se podía expresar como un porcentaje. De este modo, 23/100 era igual al 23 %. En este curso, esa relación es más conceptual, y realiza el camino inverso al recorrido hasta ahora: la conversión de los porcentajes en fracciones.

Sugerencias metodológicas

El estudio de los porcentajes se hace de manera integral, asociado siempre a las situaciones de la vida real, y aprovechando su conocimiento para facilitar habilidades como la estimación y la comparación. Se trata de contenidos básicos: la proporción, las magnitudes directamente proporcionales, la regla de tres y el caso particular de la regla de tres que es el trabajo con porcentajes. En el caso de la regla de tres, se aborda el concepto desde un doble punto de vista: el de la reducción a la unidad y el de aplicación de la regla. En cuanto a los porcentajes, se formaliza el trabajo con los mismos, que ya se había iniciado en cursos anteriores de una forma más empírica. Así, se trabajan de manera diferenciada:

- Los porcentajes simples, en los que hay que saber despejar el porcentaje, el tipo y la cantidad.
- Los porcentajes como recargo, en los que hay que saber despejar la cantidad inicial, la cantidad recargada y el tipo.
- Los porcentajes como descuento o rebaja, en los que hay que saber despejar la cantidad inicial, la cantidad rebajada y el tipo.
- La igualación a cien como un procedimiento de mejora de la comparación y estimación.

Y, como suele ser habitual en ABN, se trabajan también los porcentajes cambiando las referencias. Es decir, se estudian no solo los tantos por ciento, sino también los tantos por mil o los tantos por diez, de forma tal que el alumno, conocido un valor porcentual o en tanto por mil, por ejemplo, sepa convertirlo en otro en función del cambio de referencia.

Resolución de problemas

Hoy en día no hay actividad social con información cuantitativa que no aparezca envuelta, de una u otra forma, en porcentajes. Hasta las crónicas deportivas vienen repletas de valores e indicadores con referencia porcentual: el tiempo de posesión, el tiempo realmente jugado, las estadísticas de cada jugador, etc. Por ello, se presta especial atención al aspecto práctico de esta especial regla de tres, y se abordan los tres tipos fundamentales de problemas y las variantes de cada uno de ellos. Se completan con la comparación entre cantidades tomando una de ellas como 100.

Educación en valores

Continuamos la propuesta presentada en el tema 6, sobre el concepto que tiene el alumnado en la vida real de los porcentajes y su importancia en los repartos equitativos para evitar situaciones de conflicto.

Recursos y materiales recomendados

Material manipulable :

- Relación fracción, porcentaje, número decimal.
- PPT iniciación a los porcentajes.

Material imprimible:

- Descubre la trampa en el IVA.
- Tantos por ciento con factura.
- Cálculo del precio original conociendo el descuento y el porcentaje.

- Problemas con catálogos: «Vamos de rebajas».

Material digital:

- Vídeo explicativo del cálculo de porcentajes por aproximación.
- Porcentajes con Scratch.
- Porcentajes con Genially.

Pensamiento computacional

Cálculo mental:

En esta unidad nos centraremos en el trabajo de los porcentajes mediante estrategias de cálculo mental. También aprovecharemos para repasar fracciones y divisiones.

- Porcentajes:
  - Cálculo de porcentajes sencillos, con centenas completas: 4 % de 300, 21 % de 400, etc.
  - Cálculo de porcentajes de centenas con decenas completas: 15 % de 420.
  - Fomentar el uso de las siguientes estrategias: número de centenas.
    8 % de 300 = 3 × 8 = 24 9 % de 120 = 9 × 1,2 = 10,8
- Fracciones:
  - Sumas y restas de fracciones con diferente denominador.
- División:
  - Divisiones de tres o cuatro cifras con o sin decimales entre una cifra.
  - Fomentar el uso de las siguientes estrategias: reparto por órdenes de unidades a modo creciente de la división.

Esquema

Porcentajes

Porcentajes

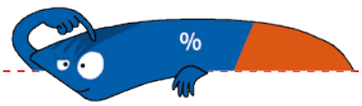
- Fórmula canónica de los porcentajes.
- Porcentajes. Casos con recargo.
- Porcentajes. Casos con descuentos.
- Porcentajes. Casos con igualación a cien.
- Elegir la mejor oferta.
- Tantos por uno, por diez, por mil, por diez mil.
- Fracciones y porcentajes.

Problemas

- Problemas de aplicación de porcentajes. Tipo I y variantes.
- Problemas de aplicación de porcentajes. Tipo II y variantes.
- Problemas de aplicación de porcentajes. Tipo III y variantes.
- Problemas de aplicación de porcentajes. Tipo IV.
- Tarea competencial.

Anotaciones

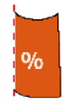
PORCENTAJES



Repasamos porcentajes

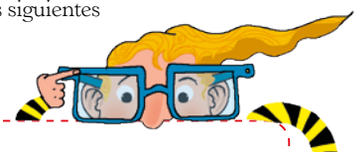
El signo «%» (tanto por ciento) de una cantidad, por ejemplo, el 48 %, nos indica que tomemos (tanto) 48 de cada 100.

Los porcentajes son también fracciones con denominador 100 y número decimal. El valor de la fracción es: $48\,\% = \frac{48}{100} = 0{,}48$.



1 Escribe de tres formas (fracción, número decimal y porcentaje) las siguientes expresiones, según corresponda.

a) 28 % b) $\frac{44}{100}$ c) 0,76 d) $\frac{59}{100}$ e) 95 %



Cálculo de porcentajes I: número de centenas

Por cada 100 alumnos de mi colegio, 15 llevan gafas: el 15 %. ¿Cuántos alumnos llevarán gafas si somos 300 en total? Hay 3 veces 100 → 3 × 15 = 45 alumnos llevarán gafas.

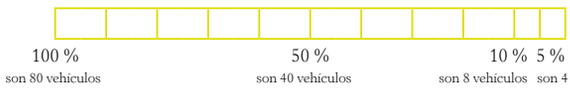
2 Por cada 100 galletitas que hay en una caja, 36 son de chocolate: el 36 %.

a) ¿Cuántas galletitas de chocolate habrá si en total hay 400?

b) ¿Y si hubiesen 300? c) ¿Y 250? d) ¿Y 50? e) ¿Y 25? d) ¿Y 75?

Cálculo de porcentajes II: estimación o escala

En un aparcamiento hay 80 vehículos. El 45 % son motocicletas. ¿Cuántas motos hay?



El 45 % son motocicletas
(50 % − 5 %)
40 − 4 = 36 motocicletas

3 Calcula utilizando la escala.

a) El 23 % de 450 €. b) El 32 % de 90 t. c) El 45 % de 3 200 L.

Pág. 104 Sugerencias metodológicas

Se comienza la unidad con un repaso y un recordatorio de lo trabajado en porcentajes en el curso anterior. Se sistematizan dos de los procedimientos. Uno, el referido al número de cientos que tiene la cantidad. Si el tipo, en un caso, es del 8 %, evidentemente en 300 el porcentaje será 24, y en 50 será de 4. El otro será la creación de una escala *ad hoc*. Si el tipo es el 16 %, cuánto será de 50 (8), de 25 (4), de 75 (12), de 10 (1,6), de 5 (0,8), de 20 (3,2), etc.

Ejercicio 1. Se trata de practicar las tres maneras posibles de escribir los porcentajes. En las cinco actividades propuestas aparecen las tres distintas formas de escritura.

Ejercicio 2. Es un ejercicio para practicar la obtención de porcentajes a partir de los cientos. Ya se ha señalado algo al principio: sabiendo el tipo, se sabe cuál es el 50 % (la mitad), el 25 % (la cuarta parte), el 75 % (las tres cuartas partes), y, aplicando la técnica de los patrones, también es fácil establecer el valor del 5 %, el 2,5 %, el 7,5 %, el 500 %, el 250 %, el 0,25 %, etc.

Soluciones

1. a) 28/100 = 0,28 c)76/100 = 76 % e) 95/100 = 0,95
b) 44 % = 0,44 d) 59 % = 0,59

2. a) 144 b) 108 c) 90 d) 18 e) 9 f) 27

3. a) 103,5 b) 28,8 c) 1 440

Cálculo de porcentajes III: la regla de tres

Ya has trabajado los porcentajes, pero ahora vas a profundizar en ellos. Los porcentajes no son más que problemas de regla de tres en los que uno de los términos es 100. Por ejemplo:

¿Cuál es el 8 % de 564?

$$\frac{100}{564} = \frac{8}{x}$$

Si de 100 € se pagan 8 €, de 564 € se pagan x. Se resuelve con el producto cruzado y el resultado se divide entre el otro miembro conocido:

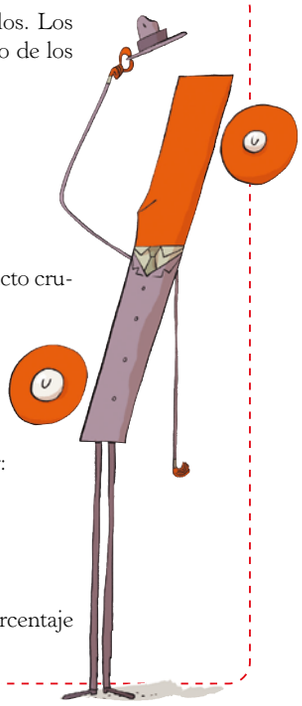
$$564 \times 8 = 4\,512$$

$$4\,512 : 100 = 45{,}12$$

Es decir, que el 8 % de 564 es 45,12.

Aprende el vocabulario propio de los porcentajes con el ejemplo anterior:

- A la cantidad 564 se la llama **base**.
- Al porcentaje 8 % se lo llama **tipo**.
- A 45,12 se lo llama **porcentaje**.
- Y a 609,12, que es el resultado de la suma de la base (564) con el porcentaje (45,12), se lo denomina **cantidad bruta**.



1 Escribe las dos fracciones equivalentes e indica cómo se halla la solución. Haz las cuentas con la calculadora. Observa el ejemplo:

a) 9 % de 2 586: $\frac{100}{2\,586} = \frac{9}{x}$; $2\,586 \times 9 = 23\,274$; $23\,274 : 100 = 232{,}74$.

b) 12 % de 13 567.

c) 27 % de 48 000.

d) 36 % de 965.

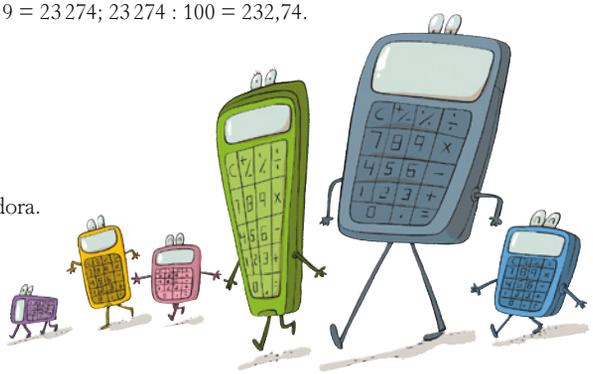
2 Averigua el resultado con la calculadora.

a) 150 % de 200.

b) 200 % de 376.

c) 110 % de 2 568.

d) 130 % de 4 096.



Anotaciones

Pág. 105 Sugerencias metodológicas

Ya en el curso anterior, los niños y las niñas habían trabajado los porcentajes y, por aproximación, hallaban porcentajes sencillos de ciertas cantidades. También, conociendo el porcentaje, sabían hallar la cantidad base. En este curso, una vez conocida la regla de tres, se formaliza el anterior conocimiento y se sistematiza para que se puedan resolver todos los tipos de problemas.

En primer lugar, el porcentaje se enmarca en una regla de tres que tiene siempre un elemento fijo: el 100. Va a ser, por tanto, una proporción a cien. En segundo lugar, al elemento fijo (100) se le han de añadir otros cuatro, como se refleja en la presente página. El docente ha de cuidar que esos cuatro elementos sean bien aprendidos, porque su buena comprensión va a ser clave en el aprendizaje de posteriores contenidos matemáticos. De los cuatro elementos, tres se extraen directamente de la aplicación de la fórmula. El cuarto, el llamado «cantidad bruta», se tiene que elaborar a partir de dos de los elementos obtenidos.

Si el 8 % de 700 es 56, tenemos, además del 100, los siguientes elementos:

8/100 = 56/700.

La **cantidad base,** que es 700 €. Es uno de los elementos de una fracción. El tipo (8), que también es un elemento de una fracción. El **porcentaje** es, junto con el 100, el elemento que completa la proporción. La **cantidad bruta** se obtiene añadiendo o quitando a la cantidad base el porcentaje obtenido:

a) Añadiendo: una bicicleta cuesta 700 €, y el IVA es del 8 %. ¿Cuánto cuesta en total, con el impuesto? En total, cuesta 756 €.

b) Quitando: una bicicleta cuesta 700 €, y hacen un descuento del 8 %. ¿A cuánto sale? Contando el descuento, sale a 644 €.

Ampliación. Se debe trabajar, con los alumnos y las alumnas más capaces, la estimación del resultado también en los casos de porcentajes, pero no de la forma en que lo han hecho hasta ahora, sino estimando el resultado a la vista de las dos fracciones que expresan la proporción. Como las fracciones se pueden plantear en dos formas diferentes (8/100 = 56/700; y 100/700 = 8/56), recomendamos que la estimación la hagan sobre la segunda forma, pues queda más evidente la proporción que existe. Véase el siguiente caso:

PLANTEAMIENTO	PRIMERA FORMA	SEGUNDA FORMA
12 % de 650	$12/100 = x/650$	$100/650 = 12/x$

Es evidente que en la segunda forma la estimación se hace más sencilla. Es seis veces y media 12. O sea, 78.

Soluciones

1. b) 1 628,04 c) 12 960 d) 347,40

2. a) 300 b) 752 c) 2 824,80 d) 5 324,80

Anotaciones

Problemas con porcentajes I: porcentajes básicos

Tipo 1: hallar el porcentaje de una cantidad

Luca quiere comprarse una bicicleta que cuesta 256 € y solo tiene ahorrado el 7 % de dicha cantidad. ¿Cuánto dinero tiene ahorrado?

Este tipo de problemas son como el de la página anterior. Recordamos cómo resolverlo:

$$\frac{100}{256} = \frac{7}{x}$$

$$256 \times 7 = 1\,792$$

$$1\,792 : 100 = 17{,}92$$

Solo tiene ahorrados 17,92 €.

1. En el cuarto del material de educación física hay 60 pelotas. El 15 % están pinchadas. ¿Cuántas pelotas están pinchadas?

2. El alumnado de música cuenta con 120 instrumentos, el 35 % son de percusión. ¿Cuántos instrumentos son de percusión?

Tipo 2: averiguar cuál es el tipo o porcentaje

La Sra. Rodríguez gana 1 800 € al mes, y paga de alquiler 450 €. ¿Qué porcentaje del sueldo supone el pago del alquiler?

1. Se establece la proporción:

   Si 1 800 es el 100, 450 será x. Es decir: $\frac{1\,800}{450} = \frac{100}{x}$

2. Se soluciona como ya sabemos:

   $450 \times 100 = 45\,000$; $45\,000 : 1\,800 = 25$

   Es decir, dedica al pago del alquiler el 25 % de su sueldo.

3. En las dos clases de 6.º somos 54 estudiantes. De ellos, 10 usan gafas. ¿Qué porcentaje del total de estudiantes de 6.º lleva gafas?

4. De las 560 personas que vamos a mi cole, 68 vienen en autobús. ¿Qué porcentaje son del total?

5. El hotel al que iremos de fin de curso tiene 64 habitaciones. Nosotros ocuparemos 44. ¿Qué porcentaje de las habitaciones dejaremos libre?

106

Pág. 106 Sugerencias metodológicas

Se inicia la resolución de problemas de porcentajes. La experiencia nos ha mostrado que un aspecto clave en la resolución de cualquiera de los tipos de estos problemas pasa por que los alumnos y las alumnas identifiquen perfectamente el dato del problema que se corresponde con el 100 %, sea o no sea la incógnita. Una vez identificado, se recomienda utilizar la primera o la segunda forma de expresar las fracciones (que se explicaron en la página anterior) según el tipo de problema.

Tipo 1. Es el caso más sencillo y, por supuesto, el más frecuente. El 100 es 256. Pero como mejor se expresa la proporción es con la primera forma: 100/7 = 256/x. De 256 a × debe haber la misma proporción que hay de 100 a 7.

Tipo 2. Es algo más difícil que el anterior. En el enunciado, al no aparecer el tipo, tampoco aparece el ciento, lo que puede inducir a error. Como ya se ha dicho, lo primero es identificar el 100 %: son los 1 800 € del sueldo. Se adopta también la primera forma: 100/x = 1 800/450. Como la proporción que guarda 450 respecto a 1 800 es de 1/4, está claro que paga de alquiler el 25 % de su sueldo.

Ejercicios 1 y 2. Son ejercicios sencillos, de aplicación directa de la fórmula del tipo 1.

Ejercicios 3 y 4. También ejercicios sencillos, de aplicación directa de la fórmula explicada en el tipo 2 de problemas.

Ejercicio 5. Es algo más difícil que los anteriores, pero también ofrece más posibilidades en su resolución. Se podría preguntar por el porcentaje de habitaciones que quedan libres, como se hace en el texto del problema, o por el porcentaje de ocupación, que sería el resultado de restarle a cien el porcentaje de las que quedan libres.

Ampliación. En el caso del tipo 1, se ha de trabajar, al menos con los alumnos y las alumnas más aventajados, el cambio de referente. Por un lado, cambiando la escala y, por otro, proyectando ese resultado en referentes distintos. Las tablas siguientes nos muestran los dos procedimientos.

CAMBIO DE ESCALA				
7 %	70/1 000	700/10 000	0,7/10	0,07/1
17,92	17,92	17,92	17,92	17,92

En este caso, el escolar ha de saber convertir el porcentaje (7) según el referente cambie de 100 a 1 000, 10 000, 10 o 1.

Tipo 3: hallar la cantidad base

Hemos comprado una lavadora. Nos han hecho un descuento del 15 %, con lo que nos hemos ahorrado 45 €. ¿Cuánto costaba la lavadora?

1. Se establece la proporción:

   Si 45 € es el 15 % del precio, ¿a qué cantidad le corresponderá el 100 %?

$$\frac{45}{x} = \frac{15}{100}$$

2. Se soluciona con la técnica que conocemos:

   $45 \times 100 = 4\,500$; $4\,500 : 15 = 300$

   La lavadora costaba 300 €.

También se puede resolver de esta otra forma:

3. Se establece la proporción con la diferencia a 100 del porcentaje conocido.

   Si el 15 % es 45, ¿cuál será el valor del 85 % restante?

$$\frac{15}{85} = \frac{45}{x}$$

4. Se resuelve conforme a la técnica que conocemos.

   $85 \times 45 = 3\,825$; $3\,825 : 15 = 255$

   255 € es el 85 % restante.

5. Para averiguar el 100 %, sumamos el importe de ambos porcentajes.

   $45 + 255 = 300$ €. Ese es el precio de la lavadora.

6. Pedimos un préstamo al banco, y le hemos pagado ya 18 000 €, que es el 40 % del importe de este. ¿Cuánto dinero nos prestó el banco?

7. Mi tía ha pagado 2 280 € en impuestos, que es el 12 % de sus ingresos anuales. ¿Cuánto dinero ingresa al año?

8. A mi padre le han subido el sueldo 90 € al mes, que es el 5 % de lo que ganaba. ¿Cuánto ganaba antes? ¿Cuánto gana después de la subida?

9. El 22 % de una finca está plantada de árboles frutales. Es una superficie de 88 áreas. ¿Cuál es, en hectáreas, la superficie de la finca?

PROYECCIÓN DE RESULTADOS				
7 %	7/1 000	7/10 000	0,7/10	0,07/1
17,92	1,792	0,179 2	179,2	1 792

Soluciones

1. 9 pelotas.

2. 42 de percusión.

3. 18,5 %.

4. 12,14 %.

5. 31,25 %.

Anotaciones

Pág. 107 Sugerencias metodológicas

Se trabaja el tercer tipo de problemas fundamentales con porcentajes simples. Si en el tipo 1 se preguntaba por el porcentaje y en el tipo 2 por el tipo, en el tipo 3 se pregunta por lo que aún no se ha abordado: la cantidad base. En el ejemplo con el que se explica este problema, se conoce el tipo (15 %), el porcentaje (45 €) y falta la cantidad base.

De las dos técnicas de resolución que se proponen, recomendamos que se aplique la primera especialmente en casos de alumnos o alumnas que tengan dificultades. Tiene solamente dos pasos y una mayor claridad en la conversión de la situación real en el lenguaje formal.

Ejercicios 6 y 7. Son de aplicación directa del procedimiento que se ha mostrado en el ejemplo. El docente puede comenzar el ejercicio preguntando a los niños que dónde está el cien y qué es exactamente en estos problemas.

Ejercicio 8. Es más complejo que el anterior, entre otras cosas porque contiene dos preguntas. Una de ellas es la que se obtiene directamente de la aplicación de la fórmula y la otra se contesta una vez que se tiene la primera.

Ejercicio 9. En este ejercicio la dificultad está en las unidades de medidas de superficie que se emplean. Son las unidades agrarias, que se estudiaron en 5.º, con las que, para dar la solución, se ha de convertir el resultado que se obtenga (que es en áreas), en hectáreas. A la vista de lo que recuerden los niños, el docente puede dedicar unos minutos a repasar las unidades agrarias y sus equivalencias antes de que el alumnado aborde el problema.

Soluciones

6. 45 000 €.

7. 19 000 €.

8. Antes 1 800 €. Ahora 1 890 €.

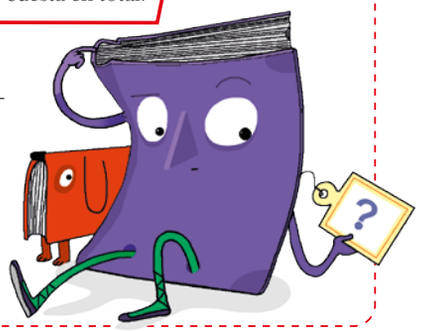
9. 4 ha.

Anotaciones

Problemas con porcentajes II: recargos o aumentos

Tipo 1: hallar la cantidad bruta conociendo la cantidad base y el aumento

Un libro cuesta 60 € más el IVA, que es el 5 %. ¿Cuánto cuesta en total?



1. Se establece la proporción:
   Si 60 € son el 100 %, el 5 % será x. Es decir $\frac{60}{x} = \frac{100}{5}$
2. Se soluciona como ya sabemos:
   $60 \times 5 = 300$; $300 : 100 = 3$ € de IVA
3. Añadimos a la cantidad base el aumento (IVA):
   $60 + 3 = 63$ €

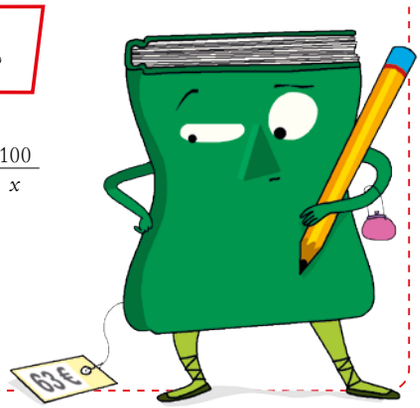
En total, el libro cuesta 63 €.

1. Un coche cuesta 18 000 €, IVA del 21 % aparte. ¿Cuánto cuesta el coche en total?

2. Un trabajador gana 1 500 € al mes. Un año le suben el sueldo un 2 %, y al año siguiente, el 2,5 %. ¿Cuánto gana al mes a partir del segundo año?

Tipo 2: hallar el porcentaje de aumento conociendo la cantidad bruta y la cantidad base

Un libro cuesta 60 € sin IVA y 63 € con IVA.
¿Qué porcentaje del precio inicial pagamos de IVA?



1. Se establece la proporción:
   Si 60 € son el 100 %, 63 € serán x. Es decir $\frac{60}{63} = \frac{100}{x}$
2. Se soluciona como ya sabemos:
   $63 \times 100 = 6\,300$; $6\,300 : 60 = 105\,\%$
3. Hallamos la diferencia entre ambos porcentajes:
   $105\,\% - 100\,\% = 5\,\%$ de aumento

Pagamos un 5 % de IVA.

3. Ayer se produjeron 150 descargas del videojuego GT y hoy se han producido 180. ¿En qué porcentaje ha aumentado el número de descargas?

4. Mi videojuego favorito costaba 48 € sin IVA y 54 € con IVA. ¿Qué porcentaje de IVA me cobraron?

Pág. 108 Sugerencias metodológicas

En esta página (y en la siguiente) se aborda una nueva clase de problemas de porcentajes. Se parte de una cantidad base, sobre la que se halla un porcentaje. Ese porcentaje se suma a la cantidad base. Con ello se da lugar a los tres problemas con los que se da respuesta a las situaciones en las que el porcentaje obtenido se recarga sobre la cantidad base. Hay también tres tipos diferentes: 1) hallar la cantidad bruta o resultante a partir de la cantidad base y del porcentaje; 2) hallar el porcentaje de aumento conociendo la cantidad base y la cantidad bruta; y 3) hallar la cantidad base conociendo el porcentaje y la cantidad bruta.

Los dos primeros tipos son los más sencillos, y ocupan la página. Como se hizo en el caso anterior, se muestra un ejemplo detallado de cada tipo y se ponen ejercicios de aplicación de los mismos.

Ejercicio 1. Es el ejercicio más sencillo de todos, pues es la aplicación directa de lo que se ha explicado en el ejemplo de la página.

Ejercicio 2. Es más complicado que el anterior, pues contiene un problema doble. En primer lugar, debe hallar lo que gana el primer año. Y sabiendo lo que gana el primer año se ha de calcular entonces lo que gana el segundo, calculando el 2,5 % del sueldo del primer año y sumando ese porcentaje a dicho sueldo para obtener el correspondiente al segundo año.

Ejercicios 3 y 4. Son ejercicios de aplicación directa de la fórmula que se ha mostrado en el ejemplo. Tienen un grado de dificultad mayor que los vistos hasta ahora.

Soluciones

1. 21 780 €.

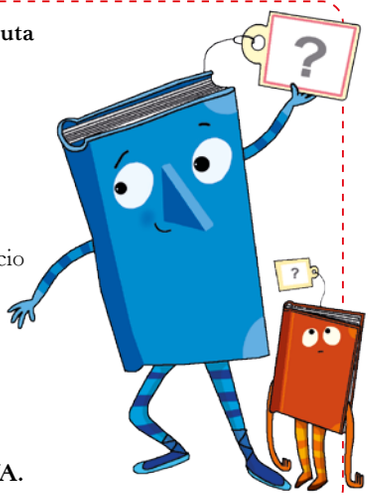
2. 1 568,25 €.

3. Un 20 %.

4. Un 12,5 %.

Tipo 3: hallar la cantidad base a partir de la cantidad bruta y el porcentaje de subida

Un libro cuesta 63 € con IVA. Si hemos pagado un 5 % de IVA, ¿cuál es el precio del libro sin el impuesto?



1 Se establece la proporción:

Si a 63 € le corresponde el 105 % (100 + 5), ¿cuál es el precio que corresponde al 100 %?

$$\frac{60}{x} = \frac{105}{100}$$

2 Se soluciona como ya sabemos:

63 × 100 = 6 300; 6 300 : 105 = 60 €

El libro costaba 60 € sin IVA.

5 La factura del hotel, incluyendo el 10 % de IVA, me ha costado 330 €. ¿Cuánto costaba la habitación antes de aplicarle el IVA?

6 Esta semana, Ainhoa ha visto cómo crecían sus seguidores en redes sociales. Ahora ya tiene 2 000. Sus cálculos le indican que se ha producido un aumento del 25 % con respecto a la semana pasada. ¿Cuántos seguidores tenía entonces?

7 Unos auriculares cuestan, incluido el 4 % del IVA, 24,96 €. ¿Cuánto se recaudará en ese impuesto si se venden 2 000 auriculares?

8 Construye los tres problemas de porcentajes relacionados con recargos seleccionando los datos que necesites para cada problema.

Entrada de cine sin IVA: 8 €

IVA del 10 %

Entrada de cine con IVA: 8,8 €

a) Problema TIPO 1. Pregunta por la cantidad bruta.

b) Problema TIPO 2. Pregunta por el porcentaje de recargo/aumento.

c) Problema TIPO 3. Pregunta por la cantidad base.

Anotaciones

Pág. 109 Sugerencias metodológicas

En esta página se abordan los problemas de la tercera clase de problemas de porcentajes, valga la redundancia. Son aquellos en los que, conociendo la cantidad bruta y el porcentaje, se busca la cantidad inicial. La novedad, respecto a los tipos anteriores, es que hay que identificar muy bien el tipo de la cantidad bruta. Hecho esto, el problema se vuelve sencillo. En el ejemplo que contiene la página se dice que el libro vale 63 € con el IVA incluido, y que este tiene un tipo del 5 %. Se pregunta cuánto cuesta el libro sin IVA. Si identificamos el precio del libro con IVA como el 105 %, ya será fácil hallar el 100 %, que será la cantidad base.

Ejercicio 5. En este caso, el tipo que recoge la factura es el 110 % del precio de la habitación. A partir de ahí solo hay que aplicar la fórmula.

Ejercicio 6. Como tantas veces hemos repetido, la clave está en encontrar el tipo de la cantidad final. Si ha subido un 25 %, los dos mil seguidores son el 125 % de los que había, que eran el 100 %.

Ejercicio 7. Se trata de un problema complejo porque en realidad está formado por tres problemas más simples. Son:

1. Averiguar la cantidad base, que es el precio de los auriculares antes de aplicarles el IVA. En este caso, la cantidad final es un tipo del 104 %.

2. Establecer la diferencia entre el precio de los auriculares antes del IVA y después del IVA. La diferencia será la ganancia o lo que se cobra por el impuesto de uno de los auriculares.

3. Hay que multiplicar la diferencia anterior por 2 000, para responder a la pregunta del problema.

Ejercicio 8. Es un ejercicio que el docente debe realizar en gran grupo, y crear más ejercicios como este para que los niños se acostumbren a trabajar los problemas pasando de un tipo a otro con soltura.

Soluciones

5. 300 €.

6. 1 600 seguidores.

7. 1 920 €.

8.
- Una entrada de cine sin IVA cuesta 8 €. Si se le aplica un IVA del 10 %, ¿cuánto costará la entrada?
- Una entrada de cine sin IVA cuesta 8 € y con IVA 8,8 €. ¿Qué porcentaje de IVA se ha aplicado?
- Una entrada de cine con IVA cuesta 8,8 €. Si se le aplica un IVA del 10 %, ¿cuánto costaba la entrada sin IVA?

Anotaciones

Problemas con porcentajes III: descuentos

Tipo 1: hallar la cantidad bruta conociendo la cantidad base y el descuento

Una chaqueta cuesta 80 €. Si nos descuentan el 20 % ¿Cuánto nos costará?

1. Se establece la proporción:
   Si 80 € son el 100 %, el 20 % será x. Es decir $\frac{80}{x} = \frac{100}{20}$
2. Se soluciona como ya sabemos:
   $80 \times 20 = 1\,600$; $1\,600 : 100 = 16$ € de descuento
3. Restamos el descuento a la cantidad base:
   $80 - 16 = 64$ €

El abrigo nos costará 64 €.

1. Un reloj inteligente cuesta 300 €. En las rebajas deciden ofrecer un descuento del 35 %. ¿Cuánto cuesta ahora el reloj?

2. Luca lleva mucho tiempo esperando que rebajen unas botas de fútbol para comprárselas. Antes costaban 120 €; ahora con el descuento del 15 %, cuestan 105 €. ¿Está bien aplicada la rebaja? Compruébalo.

Tipo 2: hallar el porcentaje de descuento conociendo la cantidad bruta y la cantidad base

Una chaqueta cuesta 80 €. Si pagamos por ella 64 €, ¿qué porcentaje del precio inicial nos han descontado?

1. Se establece la proporción:
   Si 80 € son el 100 %, 64 € serán x. Es decir $\frac{80}{64} = \frac{100}{x}$
2. Se soluciona como ya sabemos:
   $64 \times 100 = 6\,400$; $6\,400 : 80 = 80\,\%$
3. Hallamos la diferencia entre ambos porcentajes:
   $100\,\% - 80\,\% = 20\,\%$ de descuento

Nos han descontado el 20 %.

3. Inicialmente, a un directo por Internet habían asistido 600 personas, y tras media hora de directo los asistentes pasaron a ser 450. ¿En qué porcentaje disminuyó la asistencia?

Pág. 110 Sugerencias metodológicas

Una tercera clase de problemas de porcentajes es la que se aborda, en sus tres tipos, en esta página y la siguiente. Se parte del conocimiento de una cantidad base o inicial. A la misma se le halla un determinado porcentaje, que se descuenta. Y se obtiene una cantidad final o bruta que es la inicial menos el descuento.

Como en los casos anteriores, hay tres tipos de problemas: 1) hallar la cantidad bruta conociendo el porcentaje de disminución y la cantidad base; 2) hallar el porcentaje de descuento, conociendo la cantidad base y la cantidad bruta; y 3) hallar la cantidad base conociendo el porcentaje de descuento y la cantidad bruta. Los dos primeros son más sencillos y son los que ocupan esta página. El tipo 3 es más complejo y se trata en la página siguiente.

Ejercicio 1. Se trata del típico problema de rebajas, en el que hay que aplicar la fórmula sin más.

Ejercicio 2. Es un problema con trampa. A Luca lo han engañado en el descuento o, si se quiere, solo le han descontado en los primeros cien euros. El 15 % de 120 es 18, por lo que le deberían haber costado 102 €.

Ejercicio 3. Como se pregunta por el porcentaje en el que disminuyó la asistencia, se ha de considerar que el valor 100 se le debe adjudicar a las 600 personas.

Soluciones

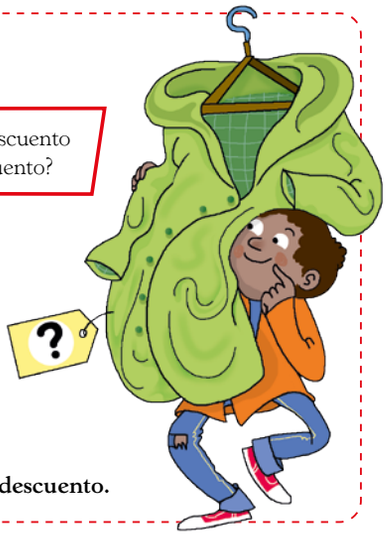
1. Cuestan 195 €.

2. No, deberían costar 102 €.

3. Un 25 %.

Tipo 3: hallar la cantidad base a partir de la cantidad bruta y el descuento

Una chaqueta nos ha costado 64 € tras aplicarnos un descuento del 20 %. ¿Cuál era el precio de la chaqueta sin el descuento?



1 Se establece la proporción:

Si a 64 € le corresponde el 80 % (100 − 20).
¿Cuál es el precio que corresponde al 100 %?

$$\frac{64}{x} = \frac{80}{100}$$

2 Se soluciona como ya sabemos:

64 × 100 = 6 400; 6 400 : 80 = 80 €

La chaqueta costaba 80 € sin el descuento.

4 María ha pagado 36 € en su última factura de móvil tras aplicarle su compañía un descuento del 12 %. ¿A cuánto ascendía el precio de la factura sin descuento alguno?

5 Un colgante costaba 80 €. Ante la escasa demanda, sus propietarios deciden rebajarlo a 48 €. ¿Qué porcentaje han aplicado en la rebaja?

6 Un televisor de 55 pulgadas cuesta 2 500 € sin IVA, que es del 21 %. Si me descuentan el 30 %, ¿cuánto pago al final?

7 Construye los tres problemas de porcentajes relacionados con el descuento seleccionando los datos que necesites para cada problema.

Videoconsola sin descuento: 500 €	Descuento del 30 %	Videoconsola con descuento: 350 €

a) Problema TIPO 1. Pregunta por la cantidad bruta.

b) Problema TIPO 2. Pregunta por el porcentaje de descuento.

c) Problema TIPO 3. Pregunta por la cantidad base.

Anotaciones

Pág. 111 Sugerencias metodológicas

En esta página se aborda el tipo III de los problemas de porcentajes con descuentos. Se conoce el dato una vez aplicado el descuento (cantidad bruta), el tipo que se ha descontado, y se pregunta por la cantidad base, o la cantidad sobre la que se ha aplicado el descuento. El docente ha de insistir en la clave del problema. En el caso del ejemplo, consiste en saber identificar en el precio final (una vez efectuado el descuento) el correspondiente porcentaje. En el problema que se muestra en las páginas, los 64 € suponen el 80 % de la cantidad base. Es decir, que identificado el porcentaje del dato que conocemos, lo demás ya es sencillo.

Ejercicio 4. Es un problema sencillo, de aplicación directa de la fórmula que se ha explicado al comienzo de la página.

Ejercicio 5. Ahora el problema es de tipo II. Pero tampoco es muy difícil, puesto que se trata de aplicar directamente la correspondiente fórmula.

Ejercicio 6. Es un problema más complejo, y por ello es conveniente que la búsqueda de la solución se haga en equipo o, al menos, en pareja. Los alumnos se encuentran ante dos alternativas. O bien calculan el precio final aplicando primero el descuento y luego el IVA, o a la inversa, calculan primero el IVA y luego el importe final. Este segundo caso es el que normalmente se aplica, y la solución es la que figura más adelante (2 117,50 €). En el primer caso, la solución es 1 382,50 €, un precio mucho más barato. Lo más importante de todo es que los alumnos sean capaces de plantearse las dos situaciones, y calcular las consecuencias de cada una de ellas en cuanto a establecer el coste final del producto.

Ejercicio 7. Es el ejercicio final en el que, a partir de los tres datos, los alumnos han de elaborar los enunciados y, por tanto, el tipo que corresponde a cada uno de ellos. Su resolución será la muestra de que esta categoría de problemas ha sido bien comprendida.

Soluciones

4. Ascendía a 40,90 €.

5. Un 40 %.

6. Al final pagó 2 117,50 €.

7. Problema tipo 1. Una videoconsola cuesta 500 €. Si se le aplica un descuento del 30 %, ¿cuál sería su precio?

Problema tipo 2. Una videoconsola cuesta 500 €. Se le aplica un descuento y su precio queda en 350 €. ¿Qué tipo de porcentaje de descuento se le ha aplicado?

Problema tipo 3. Se ha rebajado una videoconsola un 30 %, y ahora cuesta 350 €. ¿Cuál era su precio antes del descuento?

Anotaciones

Ofertas que no lo son

Compras una bicicleta un 50 % más barata de su precio original y al mes siguiente la vendes por el 75 % de lo que te costó.

Seguro que estás pensando que has ganado un 25 %. Pero no has tenido ganancias… sino pérdidas. Este tipo de «error» es muy usado en las ofertas publicitarias para que creas que te dan más de lo que realmente es.

Supongamos que el valor inicial de la bici era de 80 €. Al comprarla rebajada al 50 %, pagaste por ella 40 €.

Al venderla por el 75 % de lo que te costó (recuerda que te costó 40 € y no los 80 € que valía antes de rebajarla), obtuviste solo 30 €. Es decir, que has perdido 10 €, que es el 25 % de lo que te costó.

1 Analiza cada uno de estos casos, realiza los cálculos correspondientes y explica cuál te conviene más.

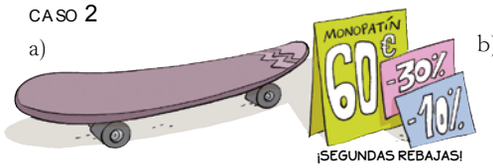
CASO 1

a)

b)

CASO 2

a)



b)

Pág. 112 Sugerencias metodológicas

Es habitual encontrarnos con situaciones de porcentajes que inducen al error por no poder identificarse adecuadamente la cantidad de la que se parte para realizar el primer porcentaje y los sucesivos. Con esta actividad buscamos descubrir al alumnado esta circunstancia a partir de una situación fácil de ver, para, a continuación, plantear una nueva problemática similar.

En ella, y sin hacer cálculos, se les plantea una situación en la que pueden pensar que un 10 % menos en el precio equivale a un porcentaje idéntico de bombones extra. Sin embargo:

– El precio sin oferta es de 30 €/kilo. Un 10 % de rebaja serían 3 €, así que el precio del kilo quedaría en 27 €.

– Un aumento del 10 % de bombones supondría pagar 30 € por 1,100 kg de bombones, lo cual supone que el kilo sale a 27,27 €. ¡¡¡MÁS CARO!!!

Aunque, a primera vista, las dos ofertas parecen similares, realmente, la rebaja del 10 % del precio nos conviene más a nosotros y menos al comerciante.

Soluciones

1. Caso 1: me conviene más la oferta a).

Caso 2: me conviene más la oferta b).

La igualación a 100

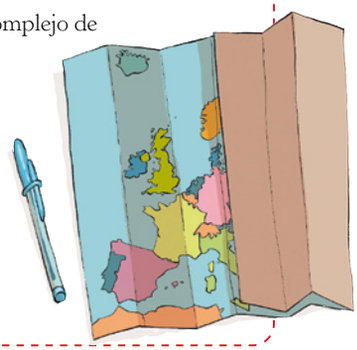
PAÍS	POBLACIÓN
Alemania	81 788 565
Bélgica	**11 104 250**
Dinamarca	5 654 128
España	46 281 097
Francia	65 269 804
Italia	60 821 544
Portugal	10 633 054
Reino Unido	**62 688 144**

Los porcentajes también nos sirven para comparar cantidades muy grandes. Utilizándolos, podemos entender mejor la diferencia entre esas cantidades.

Por ejemplo, la diferencia entre los habitantes de los países se puede entender mejor si la hacemos con referencia a 100 habitantes.

Si Reino Unido tuviera 100 habitantes, ¿cuántos tendría Bélgica?

Empezamos redondeando la población a centenas de millar y a incomplejo de millón, para simplificar los cálculos.



1 Se establece la proporción:

Si 62,7 millones es 100, entonces… ¿cuántos serán 11,1 millones?

$$\frac{62{,}7}{11{,}1} = \frac{100}{x}$$

2 Se resuelve por el procedimiento conocido:

$11{,}1 \times 100 = 1\,110$; $1\,110 : 62{,}7 = 17{,}7$

Si Reino Unido tuviera 100 habitantes, Bélgica tendría 17,7.

1 Completa el cuadro con los habitantes de las diez CC. AA. más pobladas, si en Andalucía hubiera 100 habitantes. Resuélvelo redondeando las cifras a centenas de millar y usando la calculadora.

CC. AA.	POBLACIÓN
Andalucía	8 449 985
Canarias	2 118 344
Castilla y León	2 546 078
Castilla-La Mancha	2 121 888
Cataluña	7 570 908
C. Valenciana	5 129 266
Galicia	2 751 498
C. de Madrid	6 498 560
Región de Murcia	1 474 449
País Vasco	2 193 093

CC. AA.	POBLACIÓN
Andalucía	100
Canarias	25
Castilla y León	…
Castilla-La Mancha	…
Cataluña	…
C. Valenciana	…
Galicia	…
C. de Madrid	…
Región de Murcia	…
País Vasco	…

Anotaciones

1. Como los números son muy grandes, redondeamos las poblaciones a millones con un decimal. Así la población de España pasa a ser de 46,3 millones, y la de Alemania, de 81,8 millones.
2. Establecemos el 100 como 100 %, que es la referencia, en este caso, la población de España. Si a 46,3 se considera 100, ¿cuánto serán 81,8? Ahora ya se puede plantear la fórmula del porcentaje: 100/x = 46,3/81,8. Redondeando el resultado, si España tuviera cien habitantes, Alemania tendría 177.

Pág. 113 Sugerencias metodológicas

A veces, las cantidades que son muy grandes presentan dificultades para poder apreciar o calibrar la diferencia real que se da entre ellas. Por ello, es una buena técnica utilizar los porcentajes. Se trata de igualar la cantidad que se quiera tener como referente a cien, y calcular la otra cantidad, aplicando la técnica de los porcentajes.

Como tampoco se trata de alcanzar una gran precisión, sino una aproximación que nos permita hacernos cargo de las diferencias, recurrimos al redondeo de las cantidades. Tras ello, se plantea la clásica fórmula del porcentaje y se calcula el equivalente de la cantidad que se quiere comparar. Por ejemplo, tomamos de la tabla las poblaciones de España y Alemania. ¿Cuántos habitantes tendría Alemania si España tuviera 100?

Se puede obviar el redondeo y hacer el cálculo directamente con la calculadora, pero las diferencias son tan pequeñas que no merece la pena.

Soluciones

1.

CC. AA.	POBLACIÓN	CC. AA.	POBLACIÓN
Andalucía	100	C. Valenciana	**61**
Canarias	24,7	Galicia	**33**
Castilla y León	**30**	Madrid	**74**
Castilla-La Mancha	**25**	Murcia	**18**
Cataluña	**30**	País Vasco	**26**

Anotaciones

Pág. 114 Sugerencias metodológicas

Las dos páginas se dedican a ensanchar los ámbitos porcentuales en los que hasta ahora se han movido los alumnos y las alumnas. Se trata de aplicar aquí también patrones, y, dado un determinado porcentaje, convertirlo en función de un nuevo referente. Consiste en pasar del tanto por ciento al tanto por diez o por uno, o por mil o por diez mil.

Se proponen cinco ejercicios que están tomados de estadísticas reales, de las que se suelen publicar en la prensa o se hace referencia a ellas en diferentes medios de comunicación. Los datos sobre vehículos matriculados por comunidades autónomas incluyen todo vehículo motorizado.

Ampliación. El cambio de referente puede o no implicar cambios en los datos que conforman el porcentaje del que se parte. Por ejemplo, en la estadística del ejercicio 5, España figura con el 74 % de su población como usuaria de Internet. Si el índice fuera en tantos por mil, el dato sería de 740, y si fuese en tantos por diez mil el dato sería de 7 400. Pero el docente puede proponer un tipo de ejercicios en el que el dato del que se parte no varíe, pero sí lo haga ese referente.

Por ejemplo, en el comedor del colegio se quedan a comer 47 escolares. Como en el cole hay 100 niños y niñas, se queda el 47 %. Ahora bien, ¿y si se quedaran 47 y la población fuera de mil? ¿Y si fuera de 10 000? ¿Y si fuera de 100 000? Los resultados serían, respectivamente, de 4,7; 0,47 y 0,047. Y lo más importante: ¿cómo se leerían los anteriores datos? No puede haber 4,7 escolares. Sería:

- 4,7: de cada mil escolares, menos de cinco se quedan al comedor.
- 0,47: de poco más de veinte mil escolares, tan solo uno se queda al comedor.
- 0,047: de algo más de doscientos mil niños y niñas, tan solo uno se queda al comedor.

Tantos por ciento, por mil, por diez mil...

La siguiente tabla recoge el número de vehículos de motor (coches y motos) por cada 1 000 habitantes en varios países de Europa. ¿Cómo sería por cada diez habitantes? ¿Y por cada diez mil?

El cálculo es muy simple: solo debes multiplicar o dividir por la unidad seguida de ceros. Vamos a verlo con Italia.

- Si por cada 1 000 habitantes hay → 566 vehículos
- Por cada 100 habitantes habrá → 56,6 vehículos
- Por cada 10 habitantes habrá → 5,6 vehículos
- Y si son más habitantes:
- Por cada 10 000 habitantes habrá → 5 660 vehículos
- Por 100 000 habitantes habrá → 56 600 vehículos

Haz el mismo cálculo con España e Irlanda.

PAÍS	VEHÍCULOS POR 1 000 HABITANTES
Italia	566
Austria	558
Alemania	546
Irlanda	542
Portugal	537
Suiza	516
Noruega	494
Francia	491
Bélgica	484
Finlandia	478
España	471
Suecia	461
Reino Unido	426

CC. AA.	VEHÍCULOS POR 1 000 HABITANTES
Andalucía	634
Aragón	618
Asturias	621
Baleares	817
Canarias	706
Cantabria	669
C.-La Mancha	569
C. y León	816
Cataluña	664
C. Valenciana	647
Extremadura	692
Galicia	691
C. de Madrid	658
Región de Murcia	665
Navarra	676
País Vasco	597
La Rioja	611
Ceuta-Melilla	1 423

1 Este es el número de vehículos matriculados por comunidades autónomas. Para que se pueda comparar, se expresa la siguiente relación: número de vehículos por cada mil habitantes. Utilizando la información de la tabla, clasifica las comunidades autónomas en tres categorías, pasándola a porcentajes.

a) Las más motorizadas.

b) Las que ocupan un lugar intermedio.

c) Las menos motorizadas.

2 Sin contar Ceuta y Melilla, ¿qué comunidad tiene matriculado el mayor porcentaje de vehículos y cuál el menor porcentaje?

3 ¿Cuál es el porcentaje de vehículos de la comunidad autónoma que menos tiene respecto a la que más tiene? (Usa la calculadora).

Soluciones

1. a) Las más motorizadas son Ceuta-Melilla, Baleares, Castilla y León, Canarias, Extremadura y Galicia.

b) Ocupan un lugar intermedio Navarra, Cantabria, Murcia, Cataluña, Madrid y Comunidad Valenciana.

c) Las menos motorizadas son Andalucía, Asturias, Aragón, La Rioja, País Vasco y Castilla-La Mancha.

2. El mayor porcentaje, Baleares, con el el 81,7 %. El menor porcentaje, Castilla-La Mancha, con el 56,9 %.

3. Castilla-La Mancha, con el 69,65 % de Baleares.

4 Este es el número de bebés que nacen cada año por comunidades autónomas. Para que se puedan comparar, se expresa la siguiente relación: número de bebés que nacen por cada cien mil habitantes.

a) Utilizando la información de la tabla, clasifica las comunidades autónomas en tres categorías, pasándola a porcentajes:

1. Las de mayor fecundidad.
2. Las de fecundidad media.
3. Las de menor fecundidad.

b) ¿En qué CC. AA. nacen más de 10 bebés por cada 100 habitantes?

c) ¿Cuál es la comunidad autónoma en la que nacen menos bebés por cada 100 habitantes?

d) ¿Cuántos bebés más por cada 1 000 personas deberían nacer en el País Vasco para que tuviera los mismos nacimientos que Madrid? (No cuentes los decimales).

CC. AA.	BEBÉS NACIDOS POR 100 000 HABITANTES
Andalucía	929,8
Aragón	770,4
Asturias	592,3
Baleares	839,6
Canarias	722,4
Cantabria	782,1
C.-La Mancha	661,4
C. y León	838,9
Cataluña	814,8
C. Valenciana	834,9
Extremadura	782,4
Galicia	690,5
C. de Madrid	908,7
Región de Murcia	100,10
Navarra	863,5
País Vasco	793,5
La Rioja	777,6
Ceuta-Melilla	115,00

5 Siguiendo como modelo las preguntas que te hemos realizado en los ejercicios anteriores, crea cuatro preguntas que se puedan resolver a la vista de esta tabla que relaciona los usuarios de Internet por cada 100 personas en países de Europa.

PAÍS	USO DE INTERNET POR 100 HABITANTES
Alemania	84
Bélgica	82
Dinamarca	95
España	72
Finlandia	92
Francia	82
Grecia	60
Hungría	73

PAÍS	USO DE INTERNET POR 100 HABITANTES
Islandia	97
Irlanda	78
Italia	58
Países Bajos	94
Noruega	95
Polonia	63
Portugal	62
Reino Unido	90

Anotaciones

Pág. 115 Soluciones

4. a) Para convertir el índice en 100, se divide entre mil.

CC. AA.	ÍNDICE SOBRE 100 000	PORCENTAJE
Ceuta-Melilla	11 500	11,5
Murcia	10 010	10,01
Andalucía	9 298	9,298
Madrid	9 087	9,087
Navarra	8 635	8,635
Baleares	8 396	8,396
Castilla y León	8 389	8,389
C. Valenciana	8 349	8,349
Cataluña	8 148	8,148
País Vasco	7 935	7,935
Extremadura	7 824	7,824
Cantabria	7 821	7,821
La Rioja	7 776	7,776
Aragón	7 704	7,704
Canarias	7 224	7,224
Galicia	6 905	6,905
Castilla-La Mancha	6 614	6,614
Asturias	5 923	5,923

b) En Ceuta-Melilla y Murcia. c) Asturias. d) Deberían nacer once más.

5. Respuesta libre.

Anotaciones

Las fracciones y el tanto por ciento

Las magnitudes directamente proporcionales se pueden expresar como fracciones equivalentes y, por extensión, en tanto por ciento.

Observa la relación de las fracciones y los porcentajes.

50 % equivale a $\frac{1}{2}$

El 50 % de una cantidad se halla dividiéndola por 2.

25 % equivale a $\frac{1}{4}$

El 25 % de una cantidad se halla dividiéndola por 4.

75 % equivale a $\frac{3}{4}$

El 75 % de una cantidad se halla multiplicándola por 3 y dividiéndola por 4.

10 % equivale a $\frac{1}{10}$

El 10 % de una cantidad se halla dividiéndola por 10.

90 % equivale a $\frac{9}{10}$

El 90 % de una cantidad se halla restándole el 10 %.

1 José Manuel se ha gastado 40 € este mes: 50 % en el cine, el 25 % en música, el 10 % en bolígrafos y el 15 % en regalos. ¿Qué cantidad ha gastado en cada cosa? Realiza los cálculos mentalmente.

2 Iria tiene que aplicar rebajas al precio de las siguientes etiquetas. Indica el nuevo precio de cada producto, realizándolo mentalmente.

a) Portátil 498 €; rebaja 10 %

b) Altavoz 78 €; rebaja 50 %

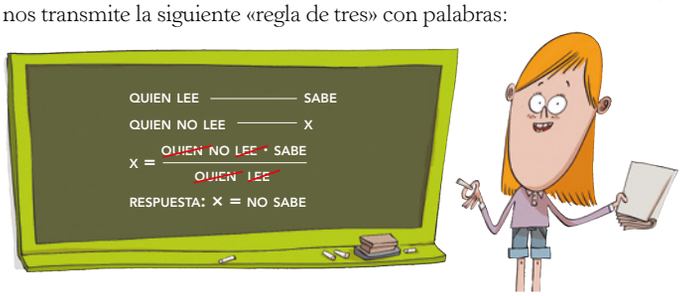
c) Tableta 284 €; rebaja 15 %

d) Videojuego 49 €; rebaja 25 %

e) Cómic 6,40 €; rebaja 20 %

f) Móvil 520 €; rebaja 30 %

Observa lo que nos transmite la siguiente «regla de tres» con palabras:



Pág. 116 Sugerencias metodológicas

Hay dos formas de identificar los porcentajes con las fracciones. Una, de manera directa, en la que se convierte ese porcentaje en una fracción de denominador 100. Así, el 40 % es igual a 40/100. Pero el 40 % = 4/10 = 2/5. Es decir, que el 40 % de una cantidad son los dos quintos de esa cantidad. Los estudiantes y el docente podrían realizar una tabla de las principales equivalencias entre fracciones y porcentajes. Sin embargo, es más conveniente que se equiparen los porcentajes con fracciones que expliquen de forma muy gráfica la relación entre los porcentajes y el total. El esqueleto de esa tabla podría ser:

PORCENTAJE	FRACCIÓN EQUIVALENTE
5 %	1/20 → una veinteava parte exacta.
10 %	1/10 → una décima parte exacta.
20 %	1/5 → una quinta parte exacta.
25 %	1/4 → una cuarta parte exacta.
33 %	Una tercera parte, aproximadamente.
40 %	2/5 → dos quintas partes, exactas.
50 %	1/2 → la mitad.
66 %	Las dos terceras partes, aproximadamente.
75 %	3/4 → las tres cuartas partes exactas.
80 %	4/5 → las cuatro quintas partes exactas.
100 %	1/1 → completo.

Soluciones

1. a) Se ha gastado 20 € en el cine; 10 €, en música; 4 €, en bolígrafos, y 6 €, en regalos.

2. Las cifras que mencionen los alumnos y alumnas deben aproximarse a estas cantidades:

a) 448,20 €. c) 241,40 €. e) 5,12 €.

b) 39 €. d) 36,75 €. f) 364 €.

Repasamos problemas de porcentajes

Resuelvo problemas

1. En una ciudad hay 4 500 bebés, que constituyen el 3 % de la población. ¿Cuántos habitantes tiene esa ciudad?

2. Un hotel tiene 180 habitaciones. Están ocupadas 108. ¿Qué porcentaje de ocupación tiene el hotel?

3. Mi madre ha cobrado los intereses del banco: 300 €. Es el 5 % del dinero que tiene depositado. ¿Cuántos euros tiene en el banco?

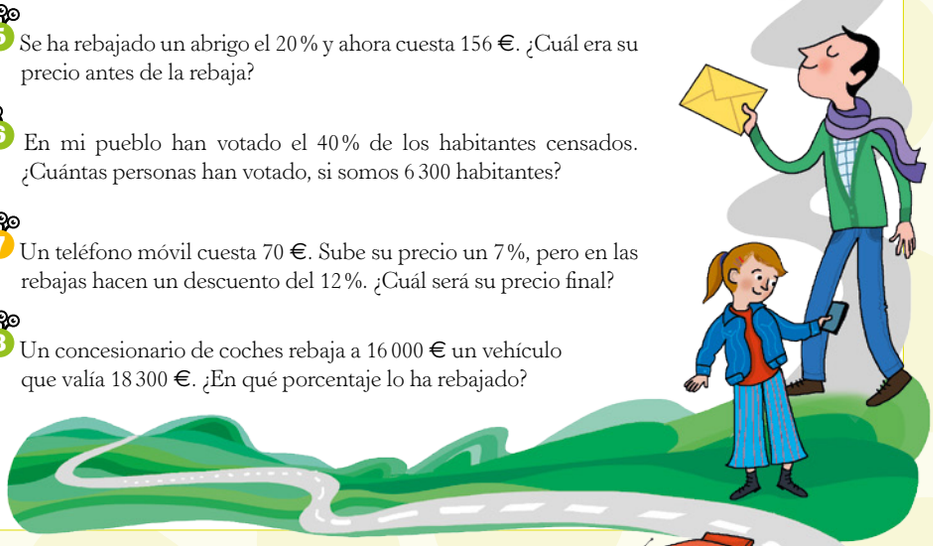
4. El río Volga mide 3 531 km. El río Tajo mide 1 007 km. ¿Cuántos kilómetros mediría el río Tajo si el Volga midiera 100 km y se guardaran las proporciones?

5. Se ha rebajado un abrigo el 20 % y ahora cuesta 156 €. ¿Cuál era su precio antes de la rebaja?

6. En mi pueblo han votado el 40 % de los habitantes censados. ¿Cuántas personas han votado, si somos 6 300 habitantes?

7. Un teléfono móvil cuesta 70 €. Sube su precio un 7 %, pero en las rebajas hacen un descuento del 12 %. ¿Cuál será su precio final?

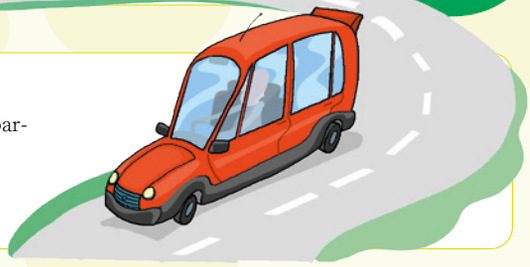
8. Un concesionario de coches rebaja a 16 000 € un vehículo que valía 18 300 €. ¿En qué porcentaje lo ha rebajado?



Invento, creo y razono

9. Inventa un problema de porcentajes a partir de los siguientes datos y resuélvelo.

48 € | 10 %



Anotaciones

Pág. 117 Sugerencias metodológicas

En esta página se presenta un conjunto de problemas, que recoge los cuatro tipos trabajados, y que están distribuidos aleatoriamente, salvo el problema 9, que es de respuesta abierta. Sugerimos que todos los problemas se resuelvan con la calculadora, puesto que el objetivo de la página no es que los problemas sirvan de excusa para realizar cálculos, sino saber aplicar todo lo que se ha aprendido en las páginas anteriores.

Soluciones

1. 150 000 habitantes.

2. 60 %.

3. 6 000 €.

4. 28,51 km.

5. 195 €.

6. 2 520 habitantes.

7. 65,91 €.

8. 12,56 %.

9. Respuesta abierta.

Anotaciones

TAREA COMPETENCIAL

El musical

Han estrenado un nuevo musical en uno de los teatros de la Gran Vía de Madrid. Alba y su familia son muy aficionados a este tipo de representaciones y han decidido asistir. Acompáñalos en su experiencia y resuelve las situaciones que se le plantean.

TIPO DE ENTRADA	PRECIO NIÑOS	PRECIO ADULTOS
Palco lateral	15	20
Anfiteatro	12	18
Patio de butacas	10	14

1 Los padres de Alba deciden adquirir las entradas unos días antes a través de la web (venta anticipada). Irán 2 niños y 2 adultos y quieren sentarse en la zona del patio de butacas. ¿Cuánto les costarán todas las entradas en total?

2 El día del musical llegan con antelación para poder comprar algunos recuerdos de la obra. Encuentran dos tiendas que venden los artículos que Alba quiere. ¿Dónde le interesa más comprar los tres artículos para que le cuesten más baratos?

TIENDA 1

- Camiseta: 20 €
- Fotos firmadas: 10 €
- Peluche: 12 €

Comprando los 3 artículos, 20 % de descuento.

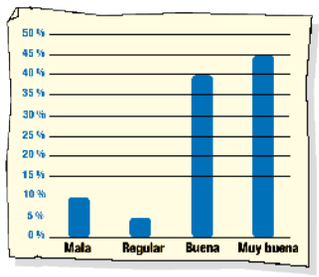
TIENDA 1

- Camiseta: 22 €
- Fotos firmadas: 9 €
- Peluche: 10 €

Comprando los 3 artículos, te regalamos el de menor precio.

3 Al término del musical participan en una encuesta para valorar su experiencia. De camino a casa, Alba decide entrar a la web del musical para ver los resultados. Estos se presentan en un diagrama de barras. Indica si son verdaderos o falsos los comentarios que les hace a sus padres tras ver el diagrama.

Al 20 % de los asistentes no les gustó el musical.	
La mayoría de los asistentes salieron encantados.	
Tan solo un 5 % la valoró como «regular».	
45 de cada 100 asistentes valoran la obra como «buena».	



Pág. 118 Sugerencias metodológicas

Las mismas orientaciones metodológicas que para las Tareas competenciales de las unidades anteriores.

Soluciones

1. 43,2 €.

2. Tienda 2.

3. F / V / V / F.

REPASO

1 Calcula utilizando el método que consideres (número de centenas, escala o regla de tres).

a) El 45 % de 720 kg.
b) El 37 % de 1 500 personas.
c) El 62 % de 4 000 €.
d) El 25 % de 180 pegatinas.
e) El 90 % de 260 refrescos.
f) El 75 % de 80 puntos.

2 Observa estas ofertas:

a) ¿Cuál es el precio final del coche?

15 200 €
¡Gran ocasión!
IVA 21% aparte
30 % menos de lo marcado

b) ¿Cuál es el precio final del jamón?

164 €
IVA 10 %
Descuento 25 %

3 Completa en tu cuaderno el cuadro con los habitantes de las ocho CC. AA. restantes si en Aragón hubiera 100 habitantes. Redondea a las decenas de millar y usa la calculadora.

CC. AA.	POBLACIÓN
Aragón	1 347 150
Andalucía	8 449 985
Asturias	1 068 165
Cantabria	591 888
Ceuta	84 180
Extremadura	1 092 997
Islas Baleares	1 111 674
Melilla	83 679
Navarra	644 477
La Rioja	322 027

CC. AA.	POBLACIÓN
Aragón	100
Andalucía	625,9
Asturias	…
Cantabria	…
Ceuta	…
Extremadura	…
Islas Baleares	…
Melilla	…
Navarra	…
La Rioja	…

Anotaciones

Pág. 119 Soluciones

1. a) 324
b) 555
c) 2 480
d) 45
e) 234
f) 60

2. a) El precio final del coche es de 12 874,40 €.
b) El precio final del jamón es de 135,30 €.

3.

CC. AA.	POBLACIÓN
Aragón	100
Andalucía	625,9
Asturias	79,2
Cantabria	43,7
Ceuta	5,9
Extremadura	81,1
Islas Baleares	81,4
Melilla	5,9
Navarra	47,4
La Rioja	23,7

8 FIGURAS PLANAS. ESCALAS

Presentación de la unidad

La última unidad del trimestre tiene dos partes claramente diferenciadas. Por un lado, la medida de los perímetros y las áreas de las figuras planas, circulares e irregulares. Por el otro, todo lo referido a las escalas, es decir, la proporción que existe entre un objeto o una distancia en el plano y en la realidad.

Ambos contenidos tendrán su continuidad en la ESO y, sobre todo, permitirá a los alumnos alcanzar un gran sentido práctico en aspectos muy importantes de la vida que no son fáciles de aprender de manera individual y al margen del mundo escolar.

Sugerencias metodológicas

Puede parecer, y así se nos ha hecho notar más de una vez, que el método ABN poco tiene que ver con la Geometría y con sus contenidos. No es esto del todo cierto. El desarrollo del sentido del número afecta de manera muy completa al razonamiento y al cálculo necesarios para muchos conceptos geométricos.

Además, en el caso de la unidad que nos ocupa, el trabajo con escalas tiene mucho que ver con la forma de trabajar ABN. Por una parte, porque hay que saber qué tipos de cálculos son necesarios para resolver las cuestiones que se plantean respecto al uso de escalas. Y por la otra, en función del propio sentido de la escala, que es un instrumento que nos permite pasar de una determinada magnitud a otra distinta mucho mayor o mucho más pequeña. De hecho, las multiplicaciones comparativas las llamamos también multiplicaciones de escala.

En definitiva, haciendo geometría se trabaja y se desarrolla el sentido del número, y se enlaza así con todo lo que se ha tratado sobre el mismo. Ha habido autores que han realizado una taxonomía sobre cómo determinados contenidos matemáticos necesitan para su comprensión del sentido numérico, y cómo estos, a su vez, coadyuvan en el desarrollo de ese sentido (por ejemplo, Hernández, López y Quintero (2015). Desarrollo del sentido numérico para la construcción del concepto de número real. *XIV CIAME-IACME. pp. 1-14)*.

Resolución de problemas

En esta unidad se tratan de forma exhaustiva los problemas de perímetros, áreas (regulares e irregulares, de polígonos y de figuras circulares) y escalas. En concreto, se abordan problemas sobre perímetros de figuras planas regulares e irregulares, la relación del perímetro con el área de las figuras, problemas sobre las áreas de las figuras planas y circulares, regulares e irregulares, el perímetro en las figuras planas y en las circulares, problemas sobre conceptos generales de escalas, escalas gráficas y numéricas y escalas en los mapas reales.

Son numerosos los problemas que se incluyen en la unidad, por lo que se recomienda el uso de la calculadora. Como hemos señalado ya, no se trata de hacer los cálculos que requiere la resolución de los problemas, sino que el alumnado sepa elegir qué cálculos son necesarios para la resolver los problemas.

Educación en valores

En esta unidad, hemos empezado haciendo un repaso y clasificación de las figuras geométricas, lo cual nos dará pie a plantear al alumnado si podríamos agrupar también los valores que tienen las personas y, con ello, alcanzar un conocimiento más amplio de los mismos.

Para ello sugerimos trabajar la siguiente clasificación:

- **Valores personales:** aquellos que nos guían por el camino para relacionarnos con los demás.
- **Valores familiares:** son que proceden de las vivencias, tradiciones, experiencias, creencias, que son transmitidos y confieren nuestro comportamiento y con los que nos desenvolvemos en sociedad.
- **Valores morales:** aquellos que controlan y desarrollan la dignidad humana nutriéndose a lo largo del tiempo con las vivencias y experiencias personales.
- **Valores socioculturales:** los que se desarrollan en la sociedad en la que vivimos y que definirán nuestras acciones sociales, como la responsabilidad, tolerancia, respeto, comprensión, bondad, etc.
- **Valores materiales:** son los que surgen al cubrir nuestras necesidades básicas y que pueden enfrentarse a otros valores personales.

Recursos y materiales recomendados

- Tangram y/o juegos similares para el repaso de las figuras planas. Cálculo de áreas y de perímetros.
- Máquina de transformación de unidades de superficie.

- Construcción de un geoplano.
- Aplicación del geoplano.
-

  Para trabajar las escalas, un elemento muy motivador y fácil de usar son las aplicaciones de mapas existentes en Internet.
- Vídeos tutoriales para trabajar las escalas.

Pensamiento computacional

En esta unidad repasaremos las estrategias para el cálculo de porcentajes y de potencias.

- Porcentajes:
  - Cálculo de porcentajes sencillos, con centenas completas: 4 % de 300, 21 % de 400, etc.
  - Cálculo de porcentajes de centenas con decenas completas: 15 % de 420.
  - Fomentar el uso de las siguientes estrategias: Número de centenas. 8 % de 300 = 3 × 8 = 24; 9 % de 120 = 9 × 1,2 = 10,8.
- Potencias: cuadrados de números de una cifra y de decenas completas, cubos de números de una cifra, cuadrados de semi-decenas y cuadrados de decenas incompletas.
- Calculadora: a lo largo del tema se aconseja el uso de la calculadora como herramienta para resolver los problemas geométricos. No tiene sentido aquí dedicar tiempo al cálculo numérico cuando lo que nos importa es el aprendizaje y resolución de los problemas de las áreas de figuras planas.

Esquema

Figuras planas. Escalas

Figuras planas

- Unidades de superficie.
- Figuras planas.
- Perímetros y áreas de las figuras planas regulares.
- Perímetros y áreas de figuras circulares.
- Áreas aproximadas en figuras irregulares.
- Las escalas. Su sentido.
- Escalas en los mapas.
- Escalas gráficas y numéricas. Su equivalencia.

Problemas

- Problemas sobre perímetros y áreas de las figuras planas regulares.
- Problemas sobre áreas de figuras planas irregulares.
- Problemas sobre perímetros y áreas de figuras circulares.
- Problemas generales de escalas.
- Problemas de escalas con mapas reales.

Anotaciones

FIGURAS PLANAS. ESCALAS

Recordamos las unidades de medida de la superficie

Recuerda que medir una superficie es medir la extensión que ocupa. La unidad principal de medida de la superficie es el **metro cuadrado (m^2)**. Estos son sus múltiplos y submúltiplos:

MÚLTIPLOS			UNIDAD PRINCIPAL	SUBMÚLTIPLOS		
km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2

× 100 entre cada dos unidades consecutivas hacia la derecha; : 100 hacia la izquierda.

1 Expresa en metros cuadrados (m^2).

a) 0,70 km^2 d) 3,20 hm^2

b) 0,21 dam^2 e) 33 dm^2

c) 4 200 cm^2 f) 6 700 000 mm^2

2 Expresa de forma incompleja según la última unidad.

a) 4 km^2 6 hm^2 3 dam^2 8 m^2 c) 7 hm^2 7 dam^2 9 m^2

b) 6 dam^2 8 m^2 7 dm^2 9 cm^2 d) 16 dm^2 21 cm^2 6 mm^2

3 Descompón de cuatro maneras distintas 150 m^2. Utiliza siempre dos unidades diferentes.

Recordamos las unidades agrarias

Recuerda que el área (a) es la unidad principal de superficie que se usa básicamente para medir superficies agrarias. Su múltiplo es la hectárea (ha) y su submúltiplo la centiárea (ca).

ha	a	ca
hm^2	dam^2	m^2

× 100 entre cada dos unidades consecutivas hacia la derecha; : 100 hacia la izquierda.

4 Expresa en la unidad indicada.

a) 4 000 m^2 = … a b) 800 dam^2 = … a c) 60 000 dam^2 = … ha d) 30 000 m^2 = … ha

Pág. 120 Sugerencias metodológicas

La primera página de la unidad se dedica a recordar las diversas unidades de superficie (incluyendo las agrarias), así como las distintas equivalencias entre ellas.

Ejercicio 1. Es un ejercicio de conversión de diversas unidades de superficie en metros cuadrados. Se ha de aconsejar a los alumnos que, en primer lugar, pasen cada medida a la unidad que corresponda sin que tenga que expresarse en decimales. Y tras ello hacer la conversión en m^2. Por ejemplo, la letra a) son 70 hm^2, y la letra f) son 320 dam^2.

Ejercicio 2. Es el típico ejercicio para pasar de un complejo a un incomplejo. La unidad a la que debe pasarlo es la que expresa la última citada. Por ejemplo, en la letra a) la respuesta es 4 060 308 m^2.

Ejercicio 3. Es otro ejercicio sencillo que ya los niños saben hacer. Se debe aclarar que la advertencia de que la descomposición tenga dos unidades diferentes quiere decir que eso sea así en cada descomposición, no en todo el ejercicio. Por ejemplo, 150 m^2 puede ser descompuesto en 1 dam^2 y 50 m^2, o en 1 dam^2 y 5 000 dm^2.

Ejercicio 4. Es también un ejercicio sencillo de repaso y de aplicación, sin mayor dificultad.

Soluciones

1. a) 700 000 b) 21 c) 0,42 d) 32 000 e) 0,33 f) 6,7

2. a) 4 060 308 m^2 b) 6 080 709 cm^2 c) 70 709 m^2 d) 162 106 mm^2

3. 1 dam^2 y 50 m^2

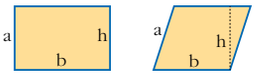
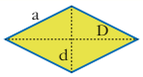
4. a) 40 a b) 800 a c) 600 ha d) 3 ha

Área y perímetro de los paralelogramos

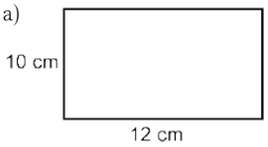
El **perímetro** es la longitud de todos los lados de una figura.

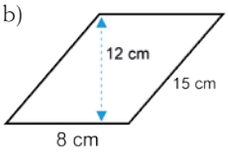
El **área** es la superficie comprendida dentro del perímetro de esta (se mide en unidades cuadradas).

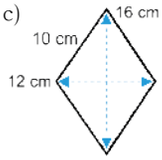
Recuerda cómo calculamos el área y el perímetro de los paralelogramos:

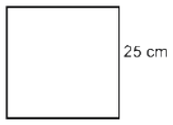
NOMBRE	FIGURA	PERÍMETRO Y ÁREA
Cuadrado		$P_{cuadrado} = 4 \cdot a$ (suma de sus lados) $A_{cuadrado} = a^2$
Rectángulo y romboide		$P_{rectángulo} = 2\,b + 2\,a$ (suma de sus lados) $A_{rectángulo} = b \cdot h$
Rombo		$P_{rombo} = 4 \cdot a$ (suma de sus lados) $A_{rombo} = \frac{D \cdot d}{2}$

1 Calcula el área y el perímetro de las siguientes figuras.

a) 

b) 

c) 

d) 

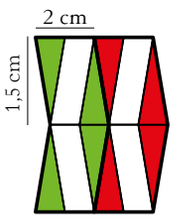
2 Resuelve en tu cuaderno a partir de los datos que se ofrecen.

a) Halla el largo de un rectángulo cuya área es 24 cm^2 y su ancho es de 3 cm.

b) Halla el perímetro de un cuadrado cuya área es de 25 cm^2.

3 Esta figura está formada por cuatro rombos cuya diagonal mayor mide 4 cm, y la menor, 3 cm. ¿Cuál es el área total de la figura?

4 En esta figura, las piezas que la forman son romboides. ¿Cuál es su área?



Anotaciones

Pág. 121 Sugerencias metodológicas

Esta página resume y sistematiza la medida de los perímetros y de las áreas de los paralelogramos. Se añaden cuatro ejercicios de aplicación. Sí es interesante que el docente señale a los alumnos y alumnas la razón por la que el romboide y el rectángulo tienen la misma área pese a que la forma es distinta. También se puede hacer lo mismo en cuanto a la diferencia entre rombo y cuadrado. En el caso del rombo, el alumno puede ver que el área del mismo es posible obtenerlo sumando el área correspondiente a los dos triángulos que se forman, bien cuando se considere como base la diagonal menor, o bien cuando se considere como base la diagonal mayor.

Ejercicio 1. Es un simple ejercicio de aplicación directa de las fórmulas.

Ejercicio 2. Contiene dos actividades diferentes, aunque con la misma finalidad: si en los ejercicios anteriores a partir de los datos de lados y diagonales hallaba el área de la figura, ahora tiene el dato del área y el de un lado, y debe hallar el dato que falta. En el caso de a) se puede utilizar como ejemplo el área del rectángulo obtenida en la letra a) del ejercicio 1. Y en el caso de b) se trata de buscar el número que multiplicado por sí mismo dé 25. Es la resolución de una raíz cuadrada muy sencilla.

Ejercicio 3. Es algo más difícil que la actividad de la letra a) del ejercicio 1, pero simplemente porque añade un paso nuevo: el producto por cuatro una vez hallada el área.

Ejercicio 4. Hay un salto de dificultad respecto a los ejercicios anteriores. En primer lugar el docente ha de hacer ver a los alumnos que en realidad hay dos romboides, uno encima de otro, o, si se quiere, un solo romboide con una forma que hasta ahora no habían estudiado. En segundo lugar, que identifiquen los dos triángulos verdes o rojos que están unidos por los vértices como iguales a los triángulos del mismo color que están unidos por las bases. Tras esto ya solo hay que aplicar la fórmula.

Soluciones

1. A = 120 cm^2 P = 44 cm
A = 96 cm^2 P = 46 cm
A = 96 cm^2 P = 40 cm
A = 625 m^2 P = 100 cm

2. a) 8 cm b) 20 cm

3. El área total de la figura es de 24 cm^2.

4. Su área es de 12 cm^2.

Anotaciones

Pág. 122 Sugerencias metodológicas

El perímetro y el área del triángulo son contenidos ya estudiados por los niños, por lo que la página tiene sobre todo un objetivo de repaso. Pero también debe aprovecharla el docente para hacer ver al alumnado algo importante. Los polígonos regulares se pueden descomponer en triángulos. O, si se quiere, están formados por triángulos. Identificándolos es muy sencillo obtener el área de esos polígonos. Basta con averiguar el área de uno de los triángulos y después multiplicarla por el número de triángulos que formen el polígono. En la página 124 de este misma unidad se volverá sobre ello.

Otra cuestión interesante es que el docente ayude a descubrir cuál es la altura del triángulo, pues en ocasiones suele ser un lado y en ocasiones no. Por ello, se ha de hacer hincapié en que la altura debe ser el segmento perpendicular que va desde un vértice a la base, coincida o no con un lado del triángulo. Pueden ayudar a la comprensión de este extremo los tres triángulos que aparecen en el ejercicio 1.

Ejercicio 1. Es un ejercicio simple, de aplicación directa de las correspondientes fórmulas.

Ejercicio 2. Es más complicado, y por ello se aconseja que se resuelva por parejas o en equipo, con el fin de que haya más de una persona que se dé cuenta de lo que cambia respecto al ejercicio anterior. No hay que asustarse por el hecho de que haya que buscar el área total de una pirámide cuadrangular, pues en la realidad hay que hallar la superficie de un triángulo, que al repetirse cuatro veces habrá también que multiplicar por cuatro. El cuadrado de la base sirve para indicar la longitud de la base del triángulo, pero también para hallar la superficie del cuadrado que forma esa base.

Ejercicio 3. En realidad son tres ejercicios diferentes. En el caso de la letra a), se pueden pedir a los alumnos sugerencias sobre cómo contestar a la pregunta. Puede hacer por ensayo y error, pero estimando el número con el que haga el ensayo en función de los datos que hay. En este caso, hay que multiplicar los 6 cm por un número que nos dé el doble del área. En la letra b) se pregunta por la base, que no deja de ser la misma cuestión de a): hay que buscar un número que al multiplicarlo por 6 nos dé el doble del área, que es 54. La respuesta a la letra c) es más sencilla. Da ocasión para que se practique la doble resta.

Soluciones

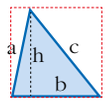
1. a) A = 36 cm². P = 31,4 cm.
b) A = 210 cm². P = 96 cm.
c) A = 14 cm². P= 21 cm.

2. 1 404 cm².

3. a) 3 cm. b) 6 cm. c) 210 cm.

Área y perímetro del triángulo

Recuerda que un triángulo ocupa siempre la mitad de la superficie de un cuadrilátero. Su área será la mitad del área del cuadrilátero que tenga su misma base y altura. El perímetro será la suma de las longitudes de sus tres lados.

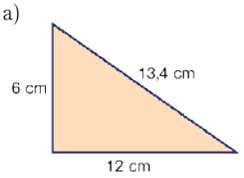


$P_{triángulo} = a + b + c$ (suma de sus lados)

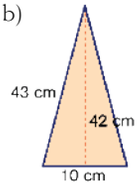
$A_{triángulo} = \frac{b \cdot h}{2}$

1 Observa las medidas y calcula el área y el perímetro de cada figura.

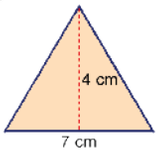
a)



b)



c)



2 Calcula la superficie que ocupa el desarrollo de esta pirámide.

3 Resuelve en tu cuaderno:

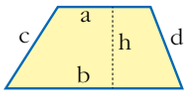
a) Halla cuánto mide la altura de un triángulo cuya área es 9 cm² y cuya base es de 6 cm.

b) Halla cuánto mide la base de un triángulo cuya área es 27 cm² y cuya altura de 6 cm.

c) El perímetro de un triángulo escaleno mide 460 cm. Si dos de sus lados miden 135 cm y 115 cm, respectivamente, halla cuánto mide el tercer lado.

Área y perímetro del trapecio y del trapezoide

Área y perímetro del trapecio

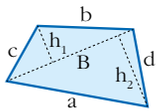


$P_{trapecio} = a + b + c + d$ (suma de sus lados)

$$A_{trapecio} = \frac{(\text{base mayor} + \text{base menor}) \cdot h}{2}$$

Área y perímetro del trapezoide

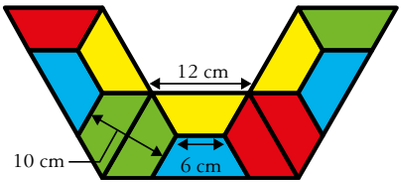
Para calcular el área del trapezoide lo dividimos en dos triángulos. La suma de sus dos áreas será la del trapezoide.



$P_{trapezoide} = a + b + c + d$ (suma de sus lados)

$$A_{trapezoide} = \frac{B \cdot h_1}{2} + \frac{B \cdot h_2}{2}$$ (suma de las áreas)

1 La siguiente figura está formada por la repetición del mismo polígono. ¿Cuál es el área de toda la figura?



2 Aquí tienes un sector del plano de la ciudad de Cádiz. Se han señalado tres solares con las medidas que vas a necesitar para hallar sus áreas. Calcula el valor de cada una de ellas.

- Solar entre C/ Cobos, C/ Cristóbal y C/ Marqués de Cádiz:

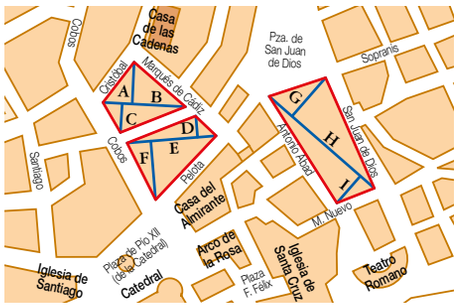
  A = 36 m; B = 75 m; C = 27 m.

- Solar entre C/ Pelota, C/ Cobos y C/ Marqués de Cádiz:

  D = 22 m; E = 85 m; F = 50 m.

- Solar entre C/ San Antonio Abad, C/ M. Nuevo y Plaza San Juan de Dios:

  G = 35 m; H = 125 m; I = 20 m.



Anotaciones

Pág. 123 Sugerencias metodológicas

Se continúa con los perímetros y las áreas de las figuras planas. Se abordan ahora las correspondientes al trapecio y al trapezoide, que ya no son paralelogramos. Respecto al área del trapezoide, se ha de hacer ver a los niños que el dibujo del mismo de la cabecera de la página no lo han de ver como descompuesto en cuatro triángulos, sino solo en dos, puesto que los segmentos h_1 y h_2 representan la altura respectiva de cada uno de los triángulos en los que se ha descompuesto el trapezoide.

Ejercicio 1. Es un ejercicio que parece mucho más complicado de lo que es. Se trata de averiguar el área de un trapecio conociendo las medidas necesarias: bases y altura. Lo que ocurre es que el dibujo «disimula» estas medidas. Hallada el área, solo hay que multiplicar por el número de trapecios.

Ejercicio 2. Ahora ya se trata de la realidad. Sobre un plano de un barrio de la ciudad de Cádiz se pregunta por la superficie de tres manzanas que tiene forma de trapezoide. Como vienen dadas las medidas, al final no hay más que aplicar la fórmula que ya se ha aprendido.

Soluciones

1. El área de toda la figura es de 540 cm^2.

2. Solar 1: 2 362,5 m^2. Solar 2: 3 060 m^2. Solar 3: 3 437,5 m^2.

Anotaciones

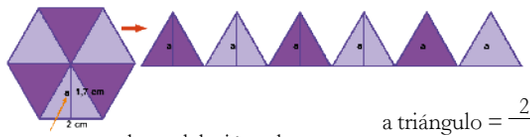
Área y perímetro de los polígonos regulares

El **perímetro** de cualquier polígono regular se calcula sumando la longitud de todos sus lados o multiplicando dicha longitud por el número de lados, ya que todos son iguales.

Para calcular el área podemos utilizar dos métodos diferentes:

Método 1: número de triángulos

Cualquier polígono regular se puede descomponer en tantos triángulos como lados tenga. Si calculamos el área de uno de ellos, tan solo tendremos que multiplicar dicha área por el número de triángulos que tenga. Observa el ejemplo:



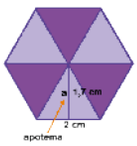
apotema = altura del triángulo

$$a_{\text{triángulo}} = \frac{2 \cdot 1{,}7}{2} = 1{,}7 \text{ cm}^2$$

$$a_{\text{hexágono}} = 1{,}7 \cdot 6 = 10{,}2 \text{ cm}^2$$

Método 2: fórmula

El procedimiento anterior puede ser sustituido por la aplicación de la correspondiente fórmula matemática.

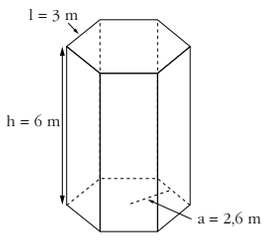


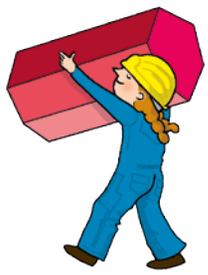
$$\frac{\text{Perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} = \frac{12 \cdot 1{,}7}{2} = 10{,}2 \text{ cm}^2$$

$$\text{Perímetro} = 6 \cdot 2 = 12 \text{ cm}$$

1 En la plaza de mi barrio hay una fuente con forma de heptágono regular. Su lado mide 2,4 m, y su apotema, 2,49 m. ¿Cuánto mide la superficie de la fuente?

2 Calcula la superficie del siguiente prisma.





124

Pág. 124 Sugerencias metodológicas

En cuanto a los dos métodos que se muestran aquí, el primero de ellos tiene más que ver con el ABN que el segundo. Fue un niño el que, al ver un pentágono que incluía sus cinco triángulos, descubrió la fórmula: halló la superficie de uno de los triángulos y multiplicó por cinco. Evidentemente tal procedimiento se puede aplicar a todos los polígonos regulares. El segundo método es mucho más sintético y, naturalmente, más elaborado. Lo que es interesante es que el docente pregunte a los niños por cómo se pasa del primer método al segundo, y si no lo descubren ellos, les puede ayudar. La diferencia es muy pequeña: el momento en que se multiplica por cinco.

Ejercicio 1. Es un ejercicio de aplicación de una fórmula, sin mayor problema.

Ejercicio 2. Se pregunta por el área total de un prisma hexagonal. Este problema puede parecer poco apropiado, puesto que no se han abordado los conceptos de área lateral y área total. Pero para alumnos entrenados en la descomposición este tipo de ejercicios resulta sencillo. Por un lado hallan la superficie de uno de los rectángulos, que multiplican por seis. Y hallan también el área de los dos hexágonos que forman las dos bases. La suma del área lateral (las áreas de los seis rectángulos) y la de las bases (los dos hexágonos) nos dará la solución del ejercicio.

Soluciones

1. La superficie de la fuente mide 20,92 m^2.

2. 154,8 m^2

Pág. 125 Sugerencias metodológicas

Entre los conceptos clave que debemos recordar para trabajar las figuras circulares están la longitud de la circunferencia y el número π. La dificultad de concepción de la razón que existe entre el diámetro y la longitud de la circunferencia se debe a que los niños y las niñas tienen el concepto de un movimiento más simple, que se puede asimilar al giro que hace un cuadrado apoyándose sobre un vértice. En este caso, un giro del cuadrado entendido como que cae sobre su lado derecho marca un recorrido igual a dos veces el lado. Pero este no es el modelo de la circunferencia, porque la circunferencia no tiene ángulos ni vértices.

Para materializar este hecho mediante una actividad manipulativa, podemos coger una caja de cartón grande y darle una vuelta sobre una

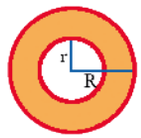
Área de las figuras circulares

Área del círculo y perímetro de la circunferencia

$$P_{circunferencia} = 2 \cdot \pi \cdot r$$
$$Á_{círculo} = \pi \cdot r^2 = 3{,}14 \cdot r^2$$

Área de la corona circular

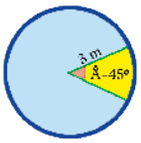
$$Área_{\ corona\ circular} = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (R^2 - r^2)$$



La corona circular podemos verla como un círculo con un hueco, que es otro círculo de radio más pequeño.

Área del sector circular

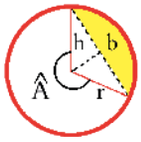
$$A_{sector\ circular} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \hat{A}}{360}$$



Un sector circular es la parte determinada por un ángulo central. Para calcular su área, recuerda que es un trozo del área del círculo.

Área del segmento circular

$$A_{segmento\ circular} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \hat{A}}{360} - \frac{b \cdot h}{2}$$



Un segmento circular es la parte del círculo comprendida entre un arco y una cuerda. Para calcular su área, basta con restar el área del sector circular a la del triángulo.

1 Halla la longitud de la circunferencia cuyo diámetro mide 28 cm. Después calcula el área del círculo interior.

2 Halla el área de una corona circular cuyo círculo mayor tiene un radio de 25 mm y el círculo menor tiene un radio de 15 mm.

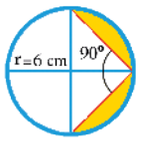
3 Me he comido un trozo de pizza, un trozo de tortilla, y de postre, una porción de tarta. ¿Qué área de cada alimento he comido?

a) Pizza
$\hat{A} = 45°$; r = 12 cm

b) Tortilla
$\hat{B} = 90°$; r = 8 cm

c) Tarta
$\hat{C} = 120°$; r = 15 cm

4 Con los datos del dibujo, calcula paso a paso el área del segmento circular de color amarillo.



cuerda colocada en línea recta en el suelo, repetir la operación con un aro de dimensiones similares a la caja y comparar ambos recorridos. Aprovechando la actividad, podemos recordar igualmente el concepto de π, para lo cual podemos usar aros de distintos diámetros que hacemos rodar sobre una cuerda para comprobar que el diámetro del aro siempre entra tres veces en la longitud de su circunferencia y que resta siempre un trazo decimal del diámetro.

A partir de la actividad anterior, propondremos calcular el área de un círculo como el área de un polígono regular de infinitos lados, para lo cual será necesaria la participación en gran grupo de los alumnos y las alumnas de dos clases. Partiremos de un cuadrado formado por una cuerda larga y cuyos cuatro vértices son sujetados por un niño o una niña. A continuación, otros cuatro cogerán en los puntos medios de cada lado y tirarán hasta formar un octógono. Otros escolares volverán a coger los puntos medios de cada lado y así sucesivamente. Esta actividad también se puede realizar con geoplanos o con el programa Geogebra.

Para abordar el área del sector circular, podemos recordarles que, en el caso de los polígonos regulares, para averiguar su área multiplicábamos la apotema (aquí sería el radio de la circunferencia) por el perímetro, que aquí sería la parte del perímetro comprendida entre la amplitud del ángulo que forman los lados del sector circular.

Volvemos nuevamente a la importancia de seguir un orden en el cálculo del área de figuras más complejas, sobre todo cuando la fórmula contiene varios cálculos. Para facilitar esta tarea, tanto en esta página como en la siguiente se plantea el cálculo de estas áreas en varios pasos. Sobre la realización de los ejercicios queremos recalcar que la introducción del cálculo de figuras como la corona circular, el sector o el segmento circulares es aconsejable realizarla de forma dirigida o incluso en equipo y dejar para la resolución individual solo los ejercicios de dificultad menor.

Los errores más habituales en el cálculo de estas áreas radican en el olvido u omisión de alguna parte de la fórmula. No obstante, no debemos obsesionarnos en su aprendizaje memorístico, el cual, aunque es aconsejable, no implica una necesidad obligatoria pues están dando el primer paso hacia un cálculo geométrico más complejo. Por otra parte, la fórmula la pueden consultar o incluso llegar a averiguarla por deducción, por lo que es más interesante centrarnos en que sean capaces de desarrollar la totalidad del proceso de cálculo de áreas de forma ordenada y correcta.

Soluciones

1. 87,92 cm - 615,44 cm^2.

2. 1 256 mm^2.

3. a) 56,52 cm^2. b) 50,24 cm^2. c) 235,5 cm^2.

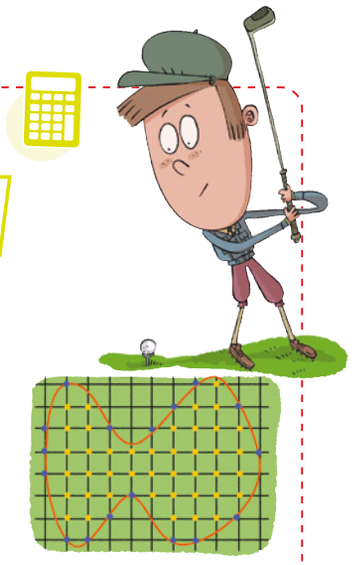
4. 20,52 cm^2.

Anotaciones

Áreas irregulares

Cuando la superficie irregular no es poligonal, calculamos su área por aproximación. Para ello, podemos usar dos formas:

Un campo de golf tiene una forma curva irregular. ¿Cómo calcular su área?



Con cuadrículas (por aproximación)

Sobre la superficie ponemos un papel transparente cuadriculado en centímetros. Marcamos los puntos que están dentro de un color y los que están en el borde o muy próximos a él de otro color.

Se cuentan los puntos del interior y los del borde (estos últimos divididos entre 2) y se suman. El total es el área aproximada en centímetros cuadrados, que en la realidad son hectómetros.

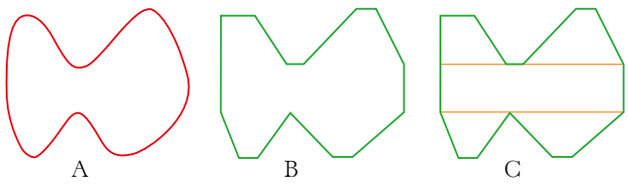
Con polígonos (aproximación más exacta)

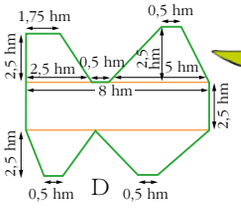
A Área del campo de golf.

B Para averiguarlo, creamos líneas poligonales próximas a su límite, hasta formar un polígono irregular.

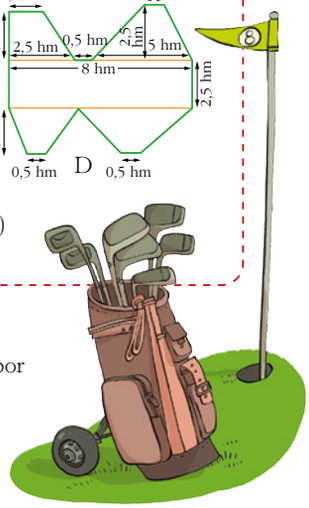
C Dividimos el polígono irregular en otros regulares que podemos calcular (pueden ser otros).

D Tomamos las medidas sobre el terreno.





Al final hemos formado cinco figuras (un rectángulo y cuatro trapecios) de las que tenemos todas sus medidas.



1 Siguiendo la explicación, calcula el área de la figura del campo de golf por aproximación con el método de puntos.

2 Y ahora, calcula el área de la figura del campo de golf de la forma más exacta.

Pág. 126 Sugerencias metodológicas

Se describe un procedimiento para calcular por aproximación el área de una figura irregular. La principal dificultad de este tipo de actividad es no contar correctamente los elementos de la figura enrejada. Para evitar fallos, el alumnado deberá ir punteando cada elemento contado. El resto del procedimiento no supone ninguna dificultad adicional.

Respecto a las figuras A, B, C y D que acompañan a la explicación, debemos recalcar que los pasos C y D son relativos y que pueden buscarse otras áreas regulares susceptibles de definirse con claridad.

Soluciones

1. El área de la figura del campo de golf es de 50 cm^2, por aproximación.

2. Su área, de forma más exacta, es de 44,69 hm^2.

Problemas sobre áreas y perímetros

Resuelvo problemas

1. Calcula la superficie de una pista de tenis, para partidos individuales o dobles, que mide 23 m de largo, si el ancho varía según se juegue individuales (8 m) o dobles (10 m). Dibuja una pista y lo verás más claro.

2. Una pared está cubierta de 98 pequeños azulejos con forma de hexágono regular de 3,5 cm de lado y 3 cm de apotema. ¿Cuál es el área de los azulejos?

3. El jardín de Nuria tiene forma de rombo, cuyas diagonales miden 9 y 6 m. Quiere hacer cuatro partes y plantar rosas en dos de ellas y en las otras dos, margaritas y claveles. ¿Qué superficie plantará en total? ¿Qué superficie reservará para cada tipo de flor?

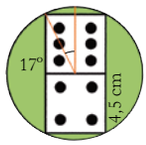
4. Calcula lo que costará sembrar de césped un jardín con forma de trapecio cuya base mayor mide 20 m; su base menor, 14 m, y su altura, 10 m, si el precio de las semillas por metro cuadrado de césped es 8 €.

5. El patio de la casa de Andrea tiene 30 m^2. ¿Podrá instalar una piscina desmontable que tiene un radio de 2,5 m?

6. ¿Cuál sería el área del borde de una piscina circular cuyo diámetro es de 12 m y cuyo vaciado de la piscina (espacio con el agua) tiene un radio de 5 m?

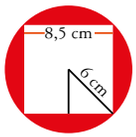
7. Una plaza circular de 25 m de radio tiene en el centro una fuente circular de 5 m de radio. ¿Cuál es el área de la plaza sin el espacio que ocupa la fuente?

8. Jugando al dominó se me ha caído una ficha por el desagüe. ¿Cuál es el área del desagüe que ha quedado sin bloquear por la ficha? El radio de la circunferencia del desagüe mide 5 cm.



Invento, creo y razono

9. Este problema parece difícil, pero si piensas, verás una forma de calcularlo rápidamente. ¿Cuál es el área de los segmentos circulares coloreados?



Anotaciones

Pág. 127 Sugerencias metodológicas

La página se dedica a la realización de problemas sobre áreas y perímetros. Todos ellos tienen un enfoque práctico y presentan diferentes niveles de dificultad. Los problemas 1 y 2 son de aplicación directa de la fórmula, con alguna particularidad. Junto con el 5 son los más sencillos.

Los problemas 6 y 8 son, aunque no lo parezca, formalmente muy semejantes. Hay un círculo menor subsumido en otro mayor, y se pregunta por la diferencia que existe entre ambas superficies. Evidentemente, en el caso del problema 8, lo que hay que descontar del área mayor del círculo no es el área de un círculo menor, sino la superficie de la ficha de dominó. Los datos que aparecen son la longitud, la anchura y el radio, y con ellos se pueden averiguar ambas áreas y, por tanto, resolver el problema.

En cuanto al Invento, creo y razono, estamos en el mismo caso que en el problema 8. Lo que aparece ahora dentro del círculo son polígonos regulares, con los datos necesarios para hallar su superficie. Como también aparece el dato del radio del círculo, averiguar ambas áreas o superficies es sencillo, como también lo es hallar su diferencia.

Nota: como en otros problemas similares, recomendamos que las operaciones necesarias para la resolución de los problemas se hagan con la calculadora. Como ya se ha señalado, lo importante no es hacer los cálculos, sino saber cuáles de ellos son pertinentes.

Soluciones

1. 184 m^2 - 230 m^2

2. 3 087 cm^2

3. 27 m^2 en total. 13,5 m^2 rosas - 6,75 m^2 margaritas - 6,75 m^2 claveles.

4. 1 360 €.

5. Sí, la piscina ocupa 19,625 m^2.

6. 34,54 m^2.

7. 1 884 m^2.

8. 38 cm^2.

9. Área del círculo 113,1 cm^2.
Área del cuadrado: 8,5 × 8,5.
Área segmentos circulares coloreados: 113,1 − 72,25 = 40,85 cm^2.

Anotaciones

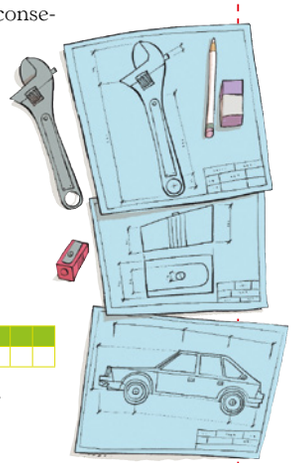
Escalas

La escala es la relación que existe entre las medidas de un objeto en el plano y en la realidad (a mayor o menor tamaño).

Se trata de una proporción y por eso la podemos expresar de distintas formas:

3:4	Usando « : » para separar los valores de la proporción.
$\frac{3}{4}$	Como fracción: tres de cada cuatro.
0,75	En forma decimal.
75 %	Como porcentaje.
	Como gráfico.

Al primer dato de la proporción lo llamamos antecedente, y al segundo, consecuente. Dependiendo de estos, las escalas pueden ser:



1. **Naturales,** si el antecedente y el consecuente son iguales. El tamaño en el plano (papel) coincide con la realidad.

   1:1 → A tiene los mismos cuadros que B.

2. **De ampliación,** si el antecedente es más grande que el consecuente. El tamaño en el plano (papel) es mayor que en la realidad.

   2:1 → A tiene el doble de cuadros que B (que tiene 15).

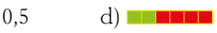
3. **De reducción,** si el antecedente es más pequeño que el consecuente. El tamaño en el plano (papel) es menor que en la realidad.

   1:3 → A sigue como el original y B se ha reducido a una quinta parte.

1 Indica cuáles son el antecedente y el consecuente de las siguientes escalas, y qué relación hay entre ellos:

a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{2}{3}$

2 Escribe de cuatro formas distintas cada una de estas proporciones o escalas:

a) $\frac{2}{5}$ b) $\frac{1}{10}$ c) 0,5 d) 

3 Pon ejemplos para estas escalas:

a) 1:2

b) 3:5

c) $\frac{1}{10}$

d) 3:4

e) 5:2

128

Pág. 128 Sugerencias metodológicas

Es una página densa, pues contiene las cinco formas de expresar las escalas, el nombre de sus elementos (antecedente y consecuente) y los tipos de escalas que se pueden dar. Hay que recalcar la importancia que tiene la correcta identificación de los datos que forman el antecedente y de los datos que forman el consecuente, pues de ello va a depender el tipo de escala. No entenderlo puede llevar a cometer errores muy graves.

Aunque se simplifique, se les hace ver que el antecedente es siempre la representación, y el consecuente la realidad. Es decir, que el primer número de la escala señala la unidad que se toma como referencia en el plano, y el segundo número su equivalencia en la realidad. Solo hay tres posibilidades: que realidad y representación sean iguales (1:1), que la realidad sea más pequeña que la representación (2:1), o que la realidad sea mayor que su representación (1:2). Conviene utilizar muchos ejemplos.

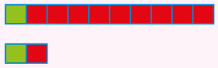
Soluciones

1. a) El antecedente es 1 y el consecuente es 5. El objeto es cinco veces mayor en la realidad que en la representación.

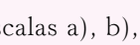
b) El antecedente es 2 y el consecuente, 3. El objeto es mayor que su representación en la proporción que indica la fracción.

2. Respuesta libre. Por ejemplo:

a) 2:5; 0,4; 40 %.

b) 1:10; 0,1; 10 %. 

c) 1/2; 1:2; 50 %.

d) 2/6; 2:6; 0,33; 33,3 %. 

3. Respuesta libre. Las escalas a), b), c) y d) son de reducción; e) es de ampliación.

Problemas de escalas sin mapas

Sigo los pasos y resuelvo el problema

Antonio ha construido una maqueta de un barco velero a escala 1:80. Las medidas son: largo 27 cm; ancho, 12 cm y alto, 18 cm. ¿Cuáles son las dimensiones reales del velero?

La escala es de reducción, en la que cada centímetro equivale a 80 cm en la realidad.

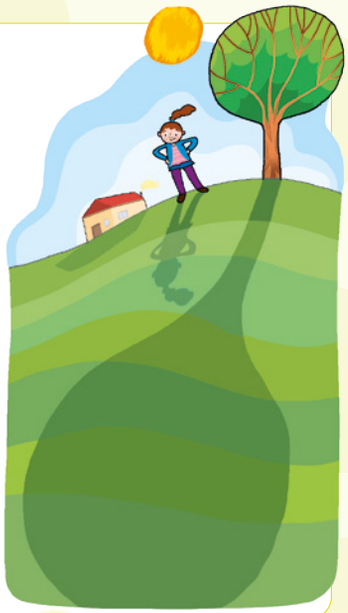
1. Usamos las proporciones que ya conocemos y calculamos el largo.

$$\frac{1}{80} = \frac{27}{x} \quad \text{Donde } x = 80 \cdot 27 = 2\,160 \text{ cm} = 21{,}6 \text{ m}$$

2. Seguidamente, calculamos el ancho utilizando el procedimiento anterior.
3. Finalmente, calculamos el alto.

Las dimensiones reales del velero son 21,6 cm de largo, … de ancho y … de alto.

Resuelvo problemas



1. Marta ha hecho una maqueta de su casa, en una proporción 1:8. La maqueta tiene 50 cm de altura. ¿Cuánto mide de alto la casa?

2. Mi equipo de fútbol ha ganado un trofeo que mide 60 cm de altura. A cada jugador nos han dado una copia, a una escala 1:10. ¿Cuál es la altura de la copia que nos han entregado?

3. Una tarjeta postal reproduce un cuadro muy famoso. Con 40 postales como esa se cubre por completo la superficie del cuadro. ¿A qué escala está la postal respecto del cuadro?

4. La sombra de un árbol mide 6 m. En ese momento, la proporción entre la altura real del árbol y la longitud de la sombra es de 2:6. ¿Cuál es la altura del árbol?

Invento, creo y razono

5. Inventa un problema similar a alguno de los anteriores a partir de la escala 1:5 y resuélvelo.

Anotaciones

Pág. 129 Sugerencias metodológicas

Comienza la página con un ejemplo resuelto. Se trata de la maqueta de un barco velero. Evidentemente, es una escala de reducción. Se explica la forma de hallar las dimensiones reales del velero, para lo que se recurre a simples reglas de tres.

Es importante que los niños y las niñas descubran que a partir de dos de los datos se puede obtener el tercero. En el caso del ejemplo de la página, los problemas hubieran podido ser tres:

1. El que aparece en la página. Se conocen la escala y el antecedente.

2. Se conocen la escala y el consecuente: Antonio ha construido una maqueta de un barco velero a escala 1:80. El velero mide 21,6 m de largo, 9,6 m de ancho y 14,4 m de alto. ¿Qué dimensiones tiene el barco velero de la maqueta?

3. Se conocen las dimensiones del antecedente y el consecuente, y se pregunta por la escala.

Soluciones

1. 4 m.

2. 6 cm.

3. 1:40.

4. 18 m.

5. Respuesta abierta.

Anotaciones

Equivalencias entre escalas gráficas y numéricas

Para expresar la relación que existe entre las dimensiones reales y las del dibujo que representa la realidad (en un mapa, plano, dibujo…), en cartografía podemos encontrar:

- **Escala numérica.** En una escala 1:50 000 podemos decir indistintamente que:

  1 km en el plano → 50 000 km en la realidad.
  1 m en el plano → 50 000 m en la realidad.
  1 cm en el plano → 50 000 cm en la realidad.

- **Escala gráfica.** Es una representación mediante una línea graduada cuyas divisiones equivalen a un número de unidades del terreno.

Convertimos una escala numérica (1:50 000) en gráfica

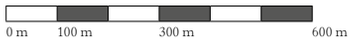
1. Averiguamos a cuántos kilómetros equivale cada centímetro en el mapa.

   Si $\frac{1\text{ km}}{100\,000\text{ cm}} = \frac{¿\text{km?}}{50\,000\text{ cm}}$. Por tanto, ¿km? = $\frac{50\,000}{100\,000\text{ cm}} = 0{,}5$ km

   Hemos averiguado que cada centímetro equivale a 0,5 km reales.

2. Dibujamos segmentos de 1 cm de largo con un valor 0,5 km cada uno.

Convertimos una escala gráfica en numérica



3. Averiguamos a cuántos centímetros equivalen los metros que están representados en el primer segmento.

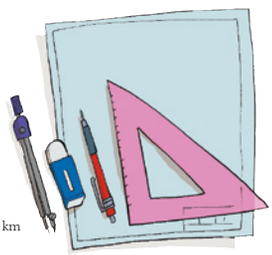
   Si $\frac{1\text{ m}}{100\text{ cm}} = \frac{100\text{ m}}{¿\text{cm?}}$. Por tanto, ¿cm? = 100 · 100 = 10 000 cm.

   Hemos averiguado que cada centímetro equivale a 100 m reales.

4. Como las escalas están dadas en centímetros, la escala numérica es 1:10 000.

1. Convierte a metros y a kilómetros las siguientes escalas. A continuación, pásalas en tu cuaderno a escalas gráficas.

   a) 1:5 000 b) 1:3 000 c) 1:50 000 d) 1:20 000



2. Convierte las siguientes escalas gráficas en numéricas.

   a)

   b)

130

Pág. 130 Sugerencias metodológicas

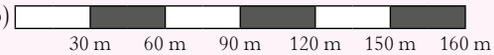
Los ejemplos que se ponen para introducir las escalas gráficas son muy apropiados y fáciles de entender. No obstante lo anterior, hay que insistir en algo muy importante: en las escalas gráficas se da por supuesto el antecedente (que suelen ser centímetros) y se expresa el consecuente en una unidad distinta. Por ello, lo primero es que pasen la unidad a centímetros. A partir de ahí, es muy fácil obtener la escala. Por ejemplo, en el caso primero, la escala es 1:50 000 (50 000 cm equivalen a medio kilómetro). Se puede expresar así: 1:500 m o 1:0,5 km. Hay que hacer notar a los niños y las niñas que si no se especifica nada, los antecedentes y consecuentes se tienen que expresar en el mismo orden de unidades.

Soluciones

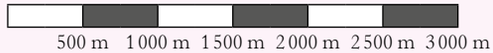
1. a) 1:50 m. 1:0,05 km. c) 1:500 m. 1:0,5 km.
b) 1:30 m. 1:0,03 km. d) 1:200 m. 1:0,2 km.

a)

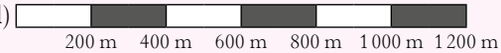
b)



c)



d)



2. a) 1:100 000 o 1:1 000 m o 1:1 km.
b) 1:25 000 o 1:250 m o 1:0,25 km.

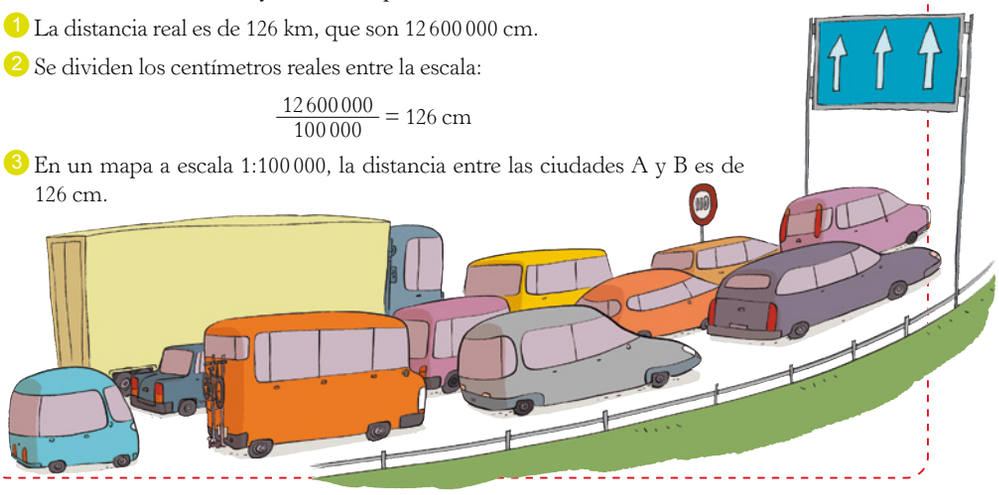
Escalas en mapas reales I

Para hallar las distancias en el mapa, vamos a ver primero un ejemplo: la distancia entre las ciudades A y B en un mapa de escala 1:100 000.

1. La distancia real es de 126 km, que son 12 600 000 cm.
2. Se dividen los centímetros reales entre la escala:

$$\frac{12\,600\,000}{100\,000} = 126 \text{ cm}$$

3. En un mapa a escala 1:100 000, la distancia entre las ciudades A y B es de 126 cm.



1 Completa en tu cuaderno la siguiente tabla.

CIUDADES	DISTANCIA (CM) EN EL MAPA	ESCALA	DISTANCIA REAL (CM)	DISTANCIA REAL (KM)
Granada - Alicante	35,3	1:1 000 000	…	…
Zaragoza - Albacete	42,3	1:1 000 000	…	…
Granada - Madrid	43,4	1:1 000 000	…	…
Pamplona - Huesca	16,3	1:1 000 000	…	…
Cádiz - Girona	138,4	1:1 000 000	…	…

2 Fijándote en lo que te hemos explicado, completa en tu cuaderno la siguiente tabla.

CIUDADES	DISTANCIA (CM) EN EL MAPA	ESCALA	DISTANCIA REAL (CM)	DISTANCIA REAL (KM)
Logroño - Madrid	…	1:1 000 000	…	336
Valladolid - Ciudad Real	…	1:1 000 000	…	304
Sevilla - Salamanca	…	1:1 000 000	…	392
Córdoba - Zaragoza	…	1:1 000 000	…	534

Anotaciones

Pág. 131 Sugerencias metodológicas

En esta página y en la siguiente, se tratan problemas de escalas con mapas reales. Se trabaja cómo se halla la escala o cómo se procede cuando hay que descubrir la distancia real conociendo la escala y la distancia en el mapa, o viceversa.

Soluciones

1.

CIUDADES	DISTANCIA (cm) EN EL MAPA	ESCALA	DISTANCIA REAL (cm)	DISTANCIA REAL (km)
Granada - Alicante	35,3	1:1 000 000	35 300 000	353
Zaragoza - Albacete	42,3	1:1 000 000	42 300 000	423
Granada - Madrid	43,4	1:1 000 000	43 400 000	434
Pamplona - Huesca	16,3	1:1 000 000	16 300 000	163
Cádiz - Girona	138,4	1:1 000 000	138 400 000	1 384

2.

CIUDADES	DISTANCIA (cm) EN EL MAPA	ESCALA	DISTANCIA REAL (cm)	DISTANCIA REAL (km)
Logroño - Madrid	33,6	1:1 000 000	33 600 000	336
Valladolid - Ciudad Real	30,4	1:1 000 000	30 400 000	304
Sevilla - Salamanca	39,2	1:1 000 000	39 200 000	392
Córdoba - Zaragoza	53,4	1:1 000 000	53 400 000	534

Anotaciones

Escalas en mapas reales II

1 Vamos a encontrar la escala de distintos mapas, conociendo la distancia en el mapa y la real. Observa el primer ejemplo entre Pontevedra y Murcia:

1. Pasamos los kilómetros a centímetros → 1 024 km = 102 400 000 cm
2. Dividimos los centímetros reales entre los del mapa:

102 400 000 : 51,2 = 2 000 000. La escala es 1:2 000 000.

CIUDADES	DISTANCIA (CM) EN EL MAPA	ESCALA	DISTANCIA REAL (CM)	DISTANCIA REAL (KM)
Pontevedra - Murcia	51,2	1:2 000 000	102 400 000	1 024
Teruel - Burgos	31,1	…	…	311
Albacete - Badajoz	44,2	…	…	442

Entre todos, completad la tabla en el cuaderno.

2 Muchas veces conocerás la distancia en el mapa, pero querrás conocer su equivalencia en kilómetros según la escala. Observa el ejemplo y haz el resto en tu cuaderno.

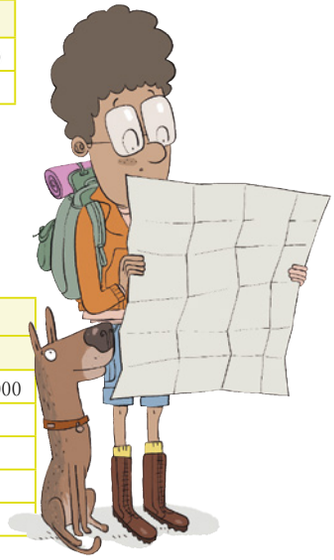
	DISTANCIA (KM) EN LA REALIDAD			
Medida en el mapa	1:10 000	1:300 000	1:2 000 000	1:20 000 000
1 cm	0,1 km	…	…	…

3 Encuentra las equivalencias en km a las escalas anteriores con:

a) 3 cm b) 7 cm c) 10 cm

4 Copia y completa este cuadro para repasar lo aprendido.

CAPITALES	DISTANCIA ENTRE CAPITALES			
	DISTANCIA (KM)	DISTANCIA (CM) EN EL MAPA		
		1:1 000 000	1:5 000 000	1:10 000 000
París - Roma	1 400	140	28	14
París - Berlín	1 050	…	…	…
Madrid - Lisboa	650	…	…	…
Madrid - Bruselas	1 600	…	…	…



Pág. 132 Soluciones

1.

CIUDADES	DISTANCIA (cm) EN EL MAPA	ESCALA	DISTANCIA REAL (cm)	DISTANCIA REAL (km)
Pontevedra - Murcia	51,2	1:2 000 000	102 400 000	1 024
Teruel - Burgos	31,1	1:1 000 000	31 100 000	311
Albacete - Badajoz	44,2	1:1 000 000	44 200 000	442

2.

	DISTANCIA (km) EN LA REALIDAD			
Medida en el mapa	1:10 000	1:300 000	1:2 000 000	1:20 000 000
1 cm	0,1 km	3 km	20 km	200 km

3.

	1:10 000	1:300 000	1:2 000 000	1:20 000 000
a) 3 cm	0,3 km	9 km	60 km	600 km
b) 7 cm	0,7 km	21 km	140 km	1 400 km
c) 10 cm	1 km	30 km	200 km	2 000 km

4.

CAPITALES	DISTANCIA ENTRE CAPITALES			
	DISTANCIA (km)	DISTANCIA (cm) EN EL MAPA		
		1:1 000 000	1:5 000 000	1:10 000 000
París - Roma	1 400	140	28	14
París - Berlín	1 050	105	21	10,5
Madrid - Lisboa	650	65	13	6,5
Madrid - Bruselas	1 600	160	32	16

Problemas de escalas con mapas

Resuelvo problemas

1. Entre nuestro pueblo y el pueblo de al lado hay una distancia en el mapa de 2,5 cm. Si la escala del mapa es 1:400 000, ¿cuántos kilómetros hay entre ambas localidades en la realidad?

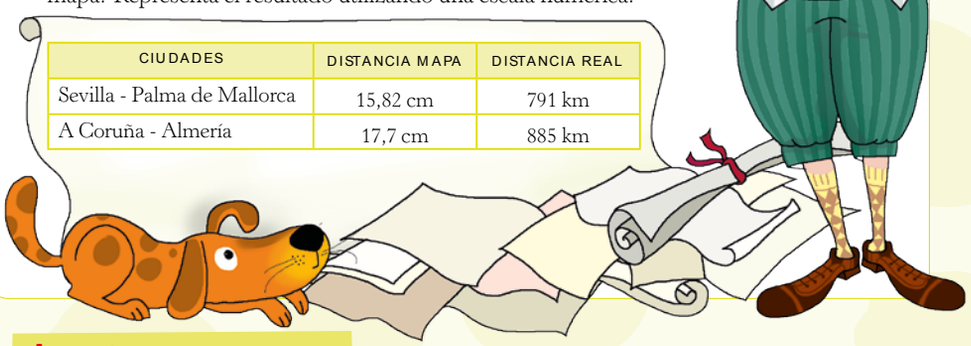
2. Adrián ha recorrido 24 km con su bicicleta. Si tuviera que representar la distancia recorrida en un mapa con esta escala gráfica, ¿cuántos centímetros tendría la ruta que dibujaría?

3. Entre la localidad de Aguilar de la Frontera y la laguna de Zóñar hay una distancia en el mapa de 5 cm. En la realidad, la distancia entre ambos puntos es de 6 km. ¿Cuántos kilómetros de la realidad corresponden a cada centímetro del mapa? Representa el resultado utilizando una escala numérica.

4. En un mapa realizado a escala 1:50 000 cm la distancia entre dos ciudades es de 35 mm. ¿Cuántos kilómetros distan en la realidad ambas ciudades?

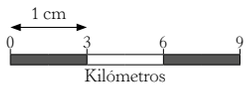
5. Hemos medido en un mapa la distancia entre estas ciudades y en la tabla tenemos la distancia real entre ellas. Según estos datos, ¿cuántos kilómetros corresponden a cada centímetro del mapa? Representa el resultado utilizando una escala numérica.

CIUDADES	DISTANCIA MAPA	DISTANCIA REAL
Sevilla - Palma de Mallorca	15,82 cm	791 km
A Coruña - Almería	17,7 cm	885 km



Invento, creo y razono

6. Inventa un problema de escalas con mapas a partir de la siguiente escala gráfica.



Anotaciones

Pág. 133 Sugerencias metodológicas

En la página anterior se muestra cómo establecer la escala de un mapa si se conocen la distancia real entre dos puntos y la distancia en centímetros en el mapa. Se puede seguir el procedimiento señalado, aunque para alumnos y alumnas con dificultades se puede realizar la búsqueda de la escala convirtiendo la distancia real en centímetros y dividiendo, con ayuda de la calculadora, por la longitud con la que tal distancia se representa en el mapa: 600 000 : 5 = 120 000. Tras ello, se puede convertir la escala en metros (5:1 200 m; o en kilómetros: 5:1,2 km).

Problema 1. Problema de aplicación de la escala. Si 1 cm equivale en la realidad a 400 000, que son 4 000 m o 4 km, la distancia real que se pide es de 10 km.

Problema 2. Es más sencillo de lo que parece. La escala gráfica marca que 4 km se representan en el mapa por 1 cm. Solo hay que dividir 24 entre 4 para saber el número de centímetros que tendrá en la escala.

Problema 3. Es un problema sencillo. Habrá que repartir los 6 km entre los 5 cm.

Problema 4. El problema es más complicado por los cambios de unidades que se requiere. En efecto, hay que pasar la escala a mm (1 mm = 500 000), y buscando su equivalencia en km, 1 mm es igual a 0,5 km. Por eso la distancia real es de 17,5 km.

Problema 5. Puede parecer complicado, pero es muy sencillo. Basta dividir el número de kilómetros entre el número de centímetros, y tendremos, claro, los kilómetros por centímetros.

Soluciones

1. 10 km.

2. 6 cm.

3. 1,2 km. 1: 1 200 000 cm.

4. 17,5 km.

5. 50 km Escala 1:5 000 000.

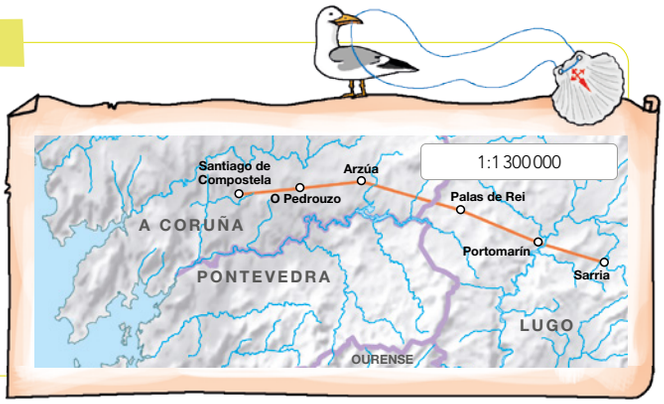
6. Respuesta abierta.

Anotaciones

TAREA COMPETENCIAL

Camino de Santiago

Arturo y sus amigos tienen pensado recorrer este año el Camino de Santiago. Para ello se han hecho con un mapa de la zona y han empezado con los preparativos del viaje. Acompáñalos en la toma de las decisiones correspondientes antes de su partida.



1 Como no tienen mucha experiencia en este tipo de rutas, han decidió salir desde Sarria. Lo primero que han hecho es dividir el camino en 5 etapas. Según la escala que indica el mapa, quieren calcular con esta tabla cuántos kilómetros realizarán cada día.

ETAPAS	DISTANCIA EN EL MAPA (CM)	DISTANCIA EN LA REALIDAD (KM)
Etapa 1: Sarria-Portomarín	1,4 cm	…
Etapa 2: Portomarín-Palas de Rei	1,6 cm	…
Etapa 3: Palas de Rei-Arzúa	2 cm	…
Etapa 4: Arzúa-O Pedrouzo	1,25 cm	…
Etapa 5: O Pedrouzo-Santiago	1,2 cm	…

2 Al terminar casi todas las etapas dormirán en albergues, excepto en Arzúa. Allí han pensado dormir en un camping. En dicho camping solo tienen disponibles algunas parcelas. Indica qué parcela deberían elegir para que quepan dos tiendas de campaña de 10,35 m^2 cada una.

3 Al llegar a Santiago de Compostela, Arturo tiene pensado sorprender a sus amigos con un regalo muy especial. Piensa regalarles una réplica de la catedral a escala 1:400. Si la catedral mide 100 m de largo, 70 m de ancho y 22 m de alto. ¿Qué dimensiones (en centímetros) deberá tener la réplica que encargue Arturo?

Pág. 134 Sugerencias metodológicas

Las mismas orientaciones metodológicas que las Tareas competenciales de las unidades anteriores.

Soluciones

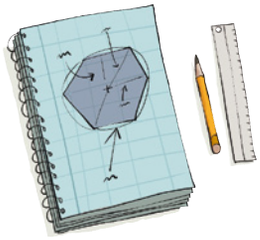
1.

ETAPAS	DISTANCIA EN EL MAPA (CM)	DISTANCIA EN LA REALIDAD (KM)
Etapa 1: Sarria - Portomarín	1,4 cm	18,2
Etapa 2: Portomarín - Palas	1,6 cm	20,8
Etapa 3: Palas de Rei - Arzúa	2 cm	26,4
Etapa 4: Arzúa - O Pedrouzo	1,25 cm	16,2
Etapa 5: O Pedrouzo - Santiago	1,2 cm	15,6

2. La que tiene forma de trapecio.

3. 25 cm de largo, 17,5 cm de ancho y 5,5 cm de alto.

REPASO

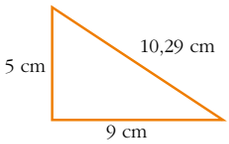


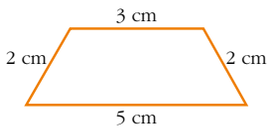
1 Expresa en metros cuadrados las siguientes medidas.

a) 0,7 km^2 b) 0,44 ha c) 4 500 cm^2 d) 5,3 a e) 11 dm^2

2 Explica qué son y en qué figuras los podemos encontrar: perímetro, radio y diámetro.

3 Calcula el perímetro de las siguientes figuras.





4 Averigua el área del trapecio anterior sabiendo que su altura es de 1,73 cm.

5 Quiero pintar la fachada lateral de mi casa, que tiene 5 m de largo y 8 m de alto. Hay una ventana de forma pentagonal regular. Su lado mide 60 cm, y su apotema 41,29 cm. ¿Cuál es el área de la fachada que pintaré?

6 ¿Cuál será el área de una cometa cuya diagonal mayor mide 75 cm, y cuya diagonal menor mide 50 cm?

7 Calcula el área de las tres zonas de esta diana, según sus radios.

$r_1 = 5$ cm
$r_2 = 10$ cm
$r_3 = 30$ cm

8 Observa este gráfico y completa la tabla en tu cuaderno.

Usando « : »	…
Como fracción	…
En forma decimal	…
Como porcentaje	…

9 Sabiendo que cada segmento de esta escala mide 1 cm, ¿qué longitud real tendría la línea verde?

Anotaciones

Pág. 135 Soluciones

1. a) 700 000 m^2. b) 4 400 m^2. c) 0,45 m^2. d) 530 m^2. e) 0,11 m^2.

2. Perímetro: lo podemos encontrar en todas las figuras planas, y en el contorno de las mismas. En la circunferencia se llama longitud. Radio: cualquier segmento que une el centro a cualquier punto de la circunferencia. Diámetro: segmento que pasa por el centro y termina en dos puntos opuestos de la circunferencia. Los podemos encontrar en los círculos.

3. a) 24,29 cm. b) 12 cm.

4. El área del trapecio es de 6,92 cm^2.

5. Pintaré un área de 59,38 m^2.

6. El área de la cometa es de 1 875 cm^2.

7. Zona amarilla, 78,5 cm^2; zona roja, 235,5 cm^2; zona azul, 2 512 cm^2.

8.

Usando « : »	**4 : 20**
Como fracción	**1/4**
En forma decimal	**0,4**
Como porcentaje	**25 %**

9. La distancia real correspondiente a la línea verde sería de 12 km.

9 OTRAS UNIDADES PARA MEDIR. UNIDADES DE VOLUMEN

Presentación de la unidad

Se abre el tercer trimestre del curso con una unidad dedicada por entero a las unidades para medir. Las primeras páginas se dedican a los prefijos de las unidades de medida muy grandes, como lo son las que miden las grandes distancias en el universo, por ejemplo. Tras ello se hace lo mismo, pero con las unidades que son muy pequeñas, las propias del mundo microscópico. En un caso y en otro, se parte de prefijos bien conocidos por los niños (kilo, mega y giga, en el caso de las unidades mayores, y deci, centi y mili en el caso de las más pequeñas).

Tras lo anterior se presentan las unidades de volumen, que son las que habían quedado sin tratar en las unidades anteriores. Se presentan sus múltiplos y submúltiplos, así como sus equivalencias y conversiones. Y, naturalmente, la expresión de esas unidades en forma compleja e incompleja.

La parte final de la unidad se dedica a la relación que existe entre el volumen y la masa. En el caso del agua, en un dm^3 cabe un litro de agua, que pesa un kilo. Pero además se contemplan las situaciones en las que el peso del líquido no es equivalente a un kilo, sino que puede ser mayor o menor. Se introduce así el sentido de densidad de los líquidos. La unidad se cierra con una extensión del concepto anterior a la densidad de población.

Sugerencias metodológicas

Las unidades de medida muy grandes van más allá de lo que es mil veces mayor o mil veces menor. En el caso de las unidades mayores los niños, a través de la informática, ya han oído lo que significa mega, giga y tera. En el caso de las más pequeñas, los prefijos micro y nano les sonarán incluso del lenguaje ordinario. Sí es bueno aprovechar esta circunstancia y para medir las enormes distancias que guardan entre sí estas unidades. Las distancias en el universo se miden a través de unidades como el pársec y el año luz. Son distancias gigantescas, de las que, para hacerse una idea, los niños deben intentar pasar a kilómetros recorridos por la luz en períodos de tiempo que controlan. Les suele apasionar.

La presentación de las unidades de volumen, que hacemos a través de la utilización de «cubos», debe contemplar cómo el propio concepto de volumen tiene que ver con los tres estadios de la naturaleza: líquido, sólido y gaseoso. De este modo hablamos del volumen de aire que hay en una habitación, o el volumen de agua que hay almacenada en un embalse, o el volumen que alcanza una roca. Las unidades de volumen se relacionan con las de capacidad aprovechando que un litro de agua es equivalente al agua que cabe en un dm^3. A partir de ahí se puede establecer la equivalencia de todas las unidades de volumen con las de capacidad. También, y debido a que un litro de agua pesa un kilo, se introduce la equivalencia con la masa.

Bien establecida la relación entre el dm^3, la capacidad del mismo y el peso si el líquido que alberga es el agua, se establece el concepto de densidad. Los niños lo entienden muy bien, puesto que pertenece a su experiencia que no a todos los volúmenes les sigue el mismo peso.

La noción de densidad la podemos extender a la densidad de población. El grado de concentración de personas en el territorio es también densidad. Este es un contenido muy importante, y para su estudio se aportan datos procedentes de las estadísticas oficiales.

Resolución de problemas

Todos los problemas propuestos en la lección, incluidos los de la situación especial de aprendizaje (Tarea competencial), están referidos a problemas de aplicación sobre las unidades de volumen, los derivados de la densidad de los materiales y, finalmente, de los correspondientes a la densidad de población. Por explicitar algo más este contenido, señalemos los tipos de problemas que se abordan:

- Sobre medidas muy grandes y muy pequeñas.
- Sobre distancias en el universo.
- Sobre equivalencias en unidades de volumen.
- Densidad entre volúmenes y masa.
- Sobre densidades de población.

Educación en valores

En la página 151 se plantea el problema típico del kilogramo de paja y el kilogramo de plomo. Este ejemplo es muy práctico para poder trabajar cómo las apariencias y las ideas preconcebidas condicionan los juicios que nos formamos sobre los demás. Por ello, sugerimos trabajar esta cuestión como valor personal.

Pero, además, las apariencias van más allá de lo personal, introduciéndose en el mundo matemático o, acaso, si pudiéramos elegir entre algo que nos parece caro y algo que nos parece barato, ¿no elegiríamos lo aparentemente más barato? Quizá, luego, tengamos que convenir que «lo barato al final sale caro» pero, al fin y al cabo, nos hemos dejado llevar por las apariencias numéricas. Eso lo saben muy bien los comerciales y publicitarios y no está de más trabajarlo en el aula, al objeto de formar un alumnado más crítico a la hora de hacer frente a este tipo de campañas.

Seguramente, muchos de los niños y las niñas puedan contar experiencias que han vivido en casa y en las cuales reconozcan situaciones que sus padres o ellos mismos vieron como una ganga, pero que al poco tiempo dieron problemas y carecían de las facilidades de cambio o reposición prometidas.

Si nos trasladamos del mundo material al humano, las relaciones son algo necesario en la vida de cada individuo, aunque se ven influenciadas por las apariencias que nos conducen, al igual que en lo material, al desengaño o, por el contrario, a la sorpresa de que aquello sobre lo que teníamos un prejuicio, en realidad, es algo totalmente distinto.

Recursos y materiales recomendados

-

  Policubos para la construcción de diferentes cuerpos y poder calcular sus volúmenes contando unidades cúbicas. Fichas y juegos interactivos.

Pensamiento computacional

En esta unidad centraremos el trabajo del cálculo mental en las potencias, productos y divisiones:

- Potencias:
  - Cuadrados de números de una cifra y de decenas completas.
  - Cubos de números de una cifra.
  - Cuadrados de semidecenas.
  - Cuadrados de decenas incompletas.
- Producto:
  - Producto de un decimal por décimas: $0,6 \times 0,7$ - $0,08 \times 0,9$ - …
  - Producto de un dígito por un dígito con decimales en ambos factores: $4,3 \times 0,8$ - $0,27 \times 0,6$ - …
  - Fomentar el uso de las siguientes estrategias: al multiplicar un orden de unidades por décimas saltamos al orden inmediatamente inferior. Ej. $d \times d = c$ - $c \times d = m$
- División:
  - Divisiones entre décimas: $16 : 0,4$ - $21 : 0,7$ - $0,9 : 0,3$ - …

Esquema

Otras unidades para medir. Unidades de volumen

Medida

- Prefijos para las grandes unidades de medida.
- Medidas para las distancias en el universo.
- Unidades de medida muy pequeñas.
- Las unidades de volumen. Múltiplos y submúltiplos.
- Equivalencias y conversiones entre unidades de volumen.
- Formas complejas e incomplejas de las unidades de volumen.
- Unidades de volumen y unidades de capacidad.
- Equivalencias entre unidades y masa. Densidad.
- Extensión del concepto de densidad. La densidad de población.

Problemas

- Problemas sobre unidades de volumen.
- Problemas sobre densidad.
- Problemas sobre densidad de población.

Pág. 140 Sugerencias metodológicas

La notación científica es un recurso matemático que incorporan los alumnos y las alumnas sin mayor dificultad. Ahora bien, para ello han de trabajar con mucha soltura las potencias de diez. Por ello, la página va ofreciendo ejercicios en los que se va señalando una aproximación al concepto. El universo y sus siderales distancias pueden aportar los contenidos a los que aplicar esta nueva herramienta. A los niños y las niñas les suele gustar esta temática, y les sirve también para entender sus ventajas: el ahorro de cifras.

Como **ampliación**, puede someterse a un reto a los alumnos y las alumnas más capaces. ¿Cómo se expresaría en notación científica lo que es infinitamente pequeño, lo que se representa con muchas o muchísimas cifras decimales? Por ejemplo, 1 000 000 es igual a 106. ¿Cómo será entonces 0,000 000 1? Se les debe invitar a que intuyan la solución o a buscarla si no son capaces de descubrirla.

Ejercicio 7. Se plantea por primera vez una expresión que lleva decimales. ¿Cuál será el resultado? Si no saben cómo hacerlo, que recurran a un patrón:

¿Cómo sería el resultado si el número de galaxias fuera 135 × 1 011?

¿Cómo sería el resultado si el número de galaxias fuera 13,5 × 1 011?

¿Cómo sería el resultado si el número de galaxias fuera 1,35 × 1 011?

¿Cómo sería el resultado si el número de galaxias fuera 0,135 × 1 011?

También pueden dejar pendiente su resolución hasta que trabajen la página siguiente.

Actividades de ampliación

1. Se calcula que el total de agua que hay en la Tierra es de 1 280 000 000 000 000 000 000 de litros. En notación científica es: **$128 \cdot 10^{19}$.**

2. Escribe las descomposiciones en sumas de potencias de base 10.

204 501	200 000 + 4 000 + 500 + 1	$2 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 1$
5 670 432	**5 000 000 + 600 000 + 70 000 + 400 + 30 + 2**	**$5 \cdot 10^6 + 6 \cdot 10^5 + 7 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 2$**
25 723	**20 000 + 5 000 + 700 + 20 + 3**	**$2 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 3$**
784 000	**700 000 + 80 000 + 4 000**	**$7 \cdot 10^5 + 8 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3$**
400 328	**400 000 + 300 + 20 + 8**	**$4 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 8$**

OTRAS UNIDADES PARA MEDIR. UNIDADES DE VOLUMEN

Notación científica

La notación científica es un recurso matemático empleado para simplificar cálculos y representar números muy grandes o muy pequeños. Para hacerlo, se usan potencias de 10.

$3 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 3 \times 10^7$

1 Expresa en forma de potencias de base 10.

a) $10 \times 10 \times 10 \times 10$ c) $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$

b) $10 \times 10 \times 10$ d) $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$

2 Resuelve las siguientes potencias de base 10.

a) 10^2 b) 10^6 c) 10^4 d) 10^5 e) 10^3

3 Completa la tabla en tu cuaderno expresando los siguientes números como potencias de base 10.

3 000	6 000 000	5 200 000	2 000 000 000	4 005 000 000
$3 \times 1\,000$	…	…	…	…
3×10^3	…	…	…	…

4 Escribe con todas las cifras, ordenadas de menor a mayor, las distancias en kilómetros entre el Sol y estos planetas.

Urano → 3×10^9 Júpiter → 8×10^8 Neptuno → 45×10^8 Marte → 23×10^7

Venus → 11×10^7 Saturno → 15×10^8 Mercurio → 6×10^7 Tierra → 15×10^7

5 El ser humano tiene 5×10^{13} células. ¿Cuántas células tiene?

6 En la Tierra hay aproximadamente 1 300 000 especies de animales y plantas. Expresa ese número en notación científica.

7 Se cree que en nuestra galaxia hay $1{,}35 \times 10^{11}$ estrellas. ¿Cuántas estrellas hay?

3. Escribe el número que corresponde a estas descomposiciones:

a) $6 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 4 =$ **63 294**

b) $2 \cdot 10^6 + 4 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 =$ **2 402 500**

c) $8 \cdot 10^5 + 7 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 7 =$ **807 537**

d) $5 \cdot 10^7 + 2 \cdot 10^6 + 4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 2 =$ **52 000 452**

Soluciones

1. a) 10^4 b) 10^8 c) 10^3 d) 10^{10}

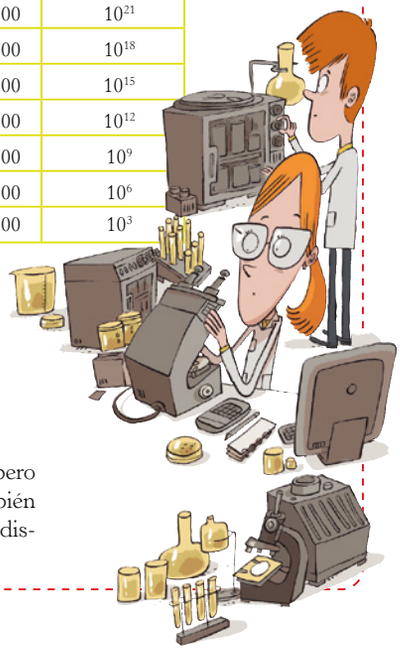
2. a) 100 b) 1 000 000 c) 10 000 d) 100 000 e) 1 000

Grandes medidas

Podemos encontrarnos con la necesidad de medir cantidades muy grandes. Para esos casos, disponemos de unidades de medida mayores que el kilo que continúan la escala que hemos aprendido.

Observa cómo expresamos las unidades de medida superiores al kilo, su prefijo, su valor en potencias de 10 y su abreviatura.

PREFIJO	SÍMBOLO	VALOR (EN m, L, g)	POTENCIA
yotta	Y	1 000 000 000 000 000 000 000 000	10^{24}
zetta	Z	1 000 000 000 000 000 000 000	10^{21}
exa	E	1 000 000 000 000 000 000	10^{18}
peta	P	1 000 000 000 000 000	10^{15}
tera	T	1 000 000 000 000	10^{12}
giga	G	1 000 000 000	10^{9}
mega	M	1 000 000	10^{6}
kilo	k	1 000	10^{3}



Por ejemplo:

5 Gm = 5 gigámetros = 5 000 000 000 m = 5×10^9 m

3 Tg = 3 teragramos = 3 000 000 000 000 g = 3×10^{12} g

4 Pm = 4 petámetros = 4 000 000 000 000 000 = 4×10^{15} m

1,5 Eg = 1,5 exagramos = $1{,}5 \times 10^{18}$ g

Estas cifras tan grandes no son corrientes en la vida diaria, pero sí son muy útiles para los científicos. Sin embargo, tú también las has oído o usado. ¿Te suena 8 gigas de memoria? ¿Y un disco duro de 1 tera?

1 Si una tonelada métrica equivale a 1 000 kg, ¿qué otra medida de peso es equivalente a la tonelada?

2 Las pirámides de Kefrén están construidas con 23×10^5 bloques. Cada uno de ellos pesa 2,5 toneladas. ¿Cuántos megagramos pesa la pirámide?

3 ¿Cuántos kilos pesan los siguientes satélites de Júpiter? Adrastea tiene una masa de 1,88 Pg; Amaltea, de 2,08 Eg; y Calipso, de 1,1 Yg.

4 Nuestro satélite, la Luna, tiene una masa de $7{,}34 \times 10^{22}$ kg. Según su masa, ¿entre qué satélites, de Júpiter la situaríamos?

Anotaciones

Pág. 141 Sugerencias metodológicas

Se presenta una tabla con las unidades de medida mayores del kilo. Indicaremos al alumnado que van creciendo de forma proporcional, a partir del kilo, en múltiplos de 1 000 y que se expresan en potencias de 10 para simplificar su escritura.

De esta tabla, seguramente les sonarán algunas medidas por haberlas oído en relación con aparatos informáticos, lo cual se puede aprovechar como motivación para aprender los prefijos de otras unidades que usarán más adelante en el contexto del almacenamiento de la información.

Soluciones

1. Es equivalente a un megagramo.

2. La pirámide pesa $57{,}5 \cdot 10^5$ t = $57{,}5 \cdot 10^5$ Mg.

3. Adrastea pesa $1{,}88 \times 10^{15}$ kg; Amaltea, $2{,}08 \times 10^{18}$ kg, y Calipso, $1{,}1 \times 10^{24}$ kg.

4. La situaríamos entre Amaltea y Calipso.

3.

3 000	6 000 000	5 200 000	2 000 000 000	4 005 000 000
$3 \times 1\,000$	**$6 \times 1\,000\,000$**	**$52 \times 100\,000$**	**$2 \times 1\,000\,000\,000$**	**$4\,005 \times 100\,000$**
3×10^3	**6×10^6**	**2×10^5**	**2×10^9**	**$4\,005 \times 1\,000^6$**

4. 60 000 000 (Mercurio) < 110 000 000 (Venus) < 150 000 000 (Tierra) < 230 000 000 (Marte) < 800 000 000 (Júpiter) < 1 500 000 000 (Saturno) < 3 000 000 000 (Urano) < 4 500 000 000 (Neptuno)

5. Tiene 50 000 000 000 000 (cincuenta billones) de células.

6. 13 · 105

7. Hay 135 000 000 000 estrellas.

Anotaciones

Las distancias en el universo

Para medir grandes distancias, usamos la notación científica, y así simplificamos su escritura. Las principales unidades para grandes distancias son:

Unidad astronómica (UA)

Equivale aproximadamente a la distancia media entre el planeta Tierra y el Sol. Su valor es 150×10^6 km (exactamente 149 597 870 700 m, o aproximadamente 150 millones de kilómetros).

Pársec (pc)

Su valor es $3{,}086 \times 10^{13}$ km. Los múltiplos del pársec son:

- **kilopársec (kpc):** mil pársecs, 3 262 años luz.
- **megapársec (Mpc):** un millón de pársecs, distancia equivalente a unos 3,26 millones de años luz.

Año luz (al)

Su valor es $9{,}46 \times 10^{12}$ km (exactamente 9 460 730 472 580,8 km). También se utilizan los términos segundos, minutos, hora y día luz, haciendo referencia a la distancia que recorre la luz en ese tiempo.

Todas estas medidas están redondeadas para facilitar los cálculos, por lo que suelen ir precedidas con un símbolo, que es una pequeña línea ondulada «~».

1 Copia y completa la siguiente tabla con las equivalencias entre las anteriores unidades de medida de longitud. Puedes usar la calculadora.

	km	UA	pc	al
1 UNIDAD ASTRONÓMICA	150×10^6	1	…	…
1 PÁRSEC	$3{,}086 \times 10^{13}$	…	1	…
1 AÑO LUZ	$9{,}46 \times 10^{12}$	…	…	1

2 Expresa en kilómetros y en potencias de 10 las siguientes distancias estelares.

a) Estrella más cercana al Sol (Próxima Centauri): 4,3 al.

b) Distancia de la estrella polar a la Tierra: 300 al.

c) Diámetro de la Vía Láctea: 100 000 al.

Pág. 142 Sugerencias metodológicas

En la definición de la unidad astronómica (ua), se indica que es la distancia media entre la Tierra y el Sol. Aquí debemos pararnos para preguntar qué entienden ellos cuando hablamos de «distancia media». Como ya conocen de cursos anteriores, la Tierra no se encuentra siempre ni a la misma distancia ni con la misma inclinación de eje respecto al Sol. Por ello, se toma como referencia la media de la mayor y la menor distancias entre ambos astros.

También interesa hacer mención de que el término año luz seguramente lo conocerán tanto de documentales como de películas de ciencia ficción, y sin duda lo identificarán con unidades de medida muy lejanas. Sin embargo, lo interesante ahora es relativizar dichas distancias, comparándolas por ejemplo con lo que la luz del Sol tarda (aproximadamente 8 minutos y 19 segundos) en llegar a nuestro planeta, y que en ese tiempo habrá recorrido nada más y nada menos que los 149,6 millones de kilómetros que nos separan, a una velocidad de 299 792 km/s.

Soluciones

1.

	km	ua	pc	al
1 UNIDAD ASTRONÓMICA	150×10^6	1	**~0,000004848**	**~0,0000158**
1 PÁRSEC	$3{,}086 \times 10^{13}$	**~280 236,36**	1	**~3,2621**
1 AÑO LUZ	$9{,}46 \times 10^{12}$	**~63 236,19**	**0,3066**	1

2. a) $40{,}7 \times 10^{12}$ km

b) $2\,838 \times 10^{12}$ km

c) $9{,}46 \times 10^{17}$ km

Pequeñas medidas

Cuando queremos realizar medidas de pequeño tamaño (peso de glóbulos rojos, longitud de granos de polen, tamaño de gotas de rocío…) necesitamos unidades más pequeñas que las que conocemos.

También se pueden expresar como potencias de 10, pero como son potencias de tamaño menor, la potencia se representa mediante un signo negativo. Por ejemplo:

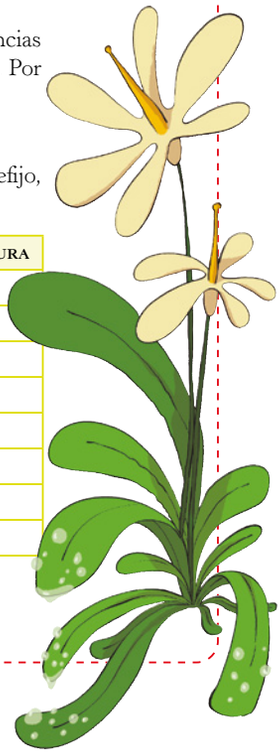
$10^{-3} = 0{,}001$ $10^{-6} = 0{,}000\,001$ $5 \times 10^{-3} = 0{,}005$ $4 \times 10^{-5} = 0{,}000\,04$

Observa cómo expresamos las unidades de medida más pequeñas, su prefijo, su valor en potencias de 10 y su abreviatura.

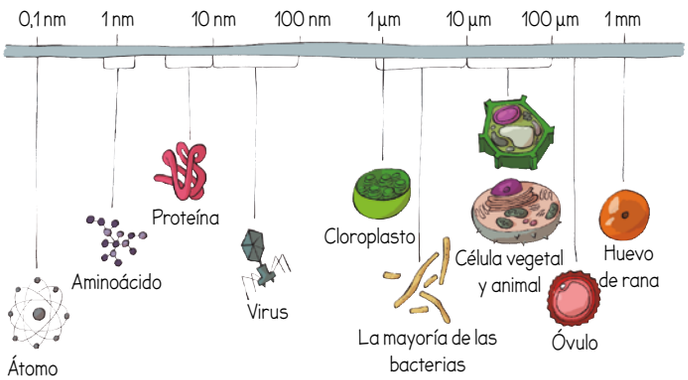
PREFIJO	VALOR (EN m, L, g)	POTENCIA	ABREVIATURA
DECI	0,1	10^{-1}	d
CENTI	0,01	10^{-2}	c
MILI	0,001	10^{-3}	m
MICRO	0,000 001	10^{-6}	μ
NANO	0,000 000 001	10^{-9}	n
PICO	0,000 000 000 001	10^{-12}	p
FEMTO	0,000 000 000 000 001	10^{-15}	f
ATTO	0,000 000 000 000 000 001	10^{-18}	a

Por ejemplo:

5 nm = 5 nanómetros = 0,000 000 005 m = 5×10^{-9} m



1 Expresa con notación científica las siguientes medidas reales:



Anotaciones

Pág. 143 Sugerencias metodológicas

Al igual que con las unidades grandes de medida, a los alumnos y alumnas les resultarán familiares algunas unidades de medida pequeñas. Podemos empezar, por tanto, identificando aquellas que les suenan y el contexto en el que las han escuchado.

Soluciones

1. Átomo: 10^{-10}.
Aminoácido: 10^{-9}.
Proteína: 10^{-8}.
Virus: 10^{-7}.
Cloroplasto: 10^{-6}.
Bacteria: intervalo entre 10−6 y 10^{-5}.
Célula: intervalo entre 10−5 y 10^{-4}.
Óvulo: 10^{-4}.
Huevo de rana: 10^{-3}.

Anotaciones

Presentación de las unidades de volumen

Cuando hablamos de volumen, como magnitud medible, nos referimos al espacio que ocupa un líquido, un gas o un sólido.

El volumen y los líquidos

Podemos medir la cantidad de agua de los pantanos, el caudal de agua de un río, las cisternas donde se almacenan grandes cantidades de leche o de gasolina, etc. Así mismo, el agua que consumimos en casa viene medida en unidades de volumen en las facturas que nos llegan.

El volumen y los gases

También podemos medir el aire que cabe en una habitación, el vapor que se suministra en una sauna, etc. Otros gases se licuan para envasarlos y transportarlos, como el oxígeno en una botella para poder bucear, la bombona de butano, etc.

El volumen y los sólidos

Con el volumen también determinamos el espacio que ocupa cualquier objeto grande o pequeño, desde un alfiler hasta un avión, pasando por lo que cabría en el maletero del coche, en contenedores de mercancías, etc.

1 Indica, de la siguiente lista, aquello de lo que se pueda calcular su volumen.

a) Un camión de arena para una construcción.

b) El ruido que hace una música muy fuerte.

c) Cuando tienes un gran volumen de trabajo.

d) Una hoja de papel muy fina.

e) Un palé de botellas de cristal vacías.

f) Un libro.

144

Pág. 144 Sugerencias metodológicas

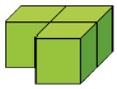
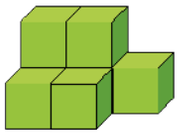
Se realiza una primera aproximación al concepto de volumen como el espacio que ocupa un objeto, mostrando cómo en el mundo que nos rodea esto está presente en los distintos estados de la materia. Para ello, primero, indicamos cómo se manifiesta el volumen y, a continuación, les proponemos que identifiquen aquello de lo que podemos medir el volumen que ocupa y lo comparen con otros casos en los que o bien se emplea la palabra volumen, pero esta no cumple con el concepto de volumen, o bien piensen que algo no ocupa volumen debido a su insignificancia o sus características.

Soluciones

1. Se puede calcular el volumen de: a), d), e) y f).

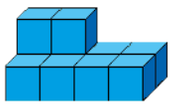
Concepto de volumen con cubos

Podemos calcular el volumen de un cuerpo tomando como unidad de medida un cubo y contando el total de cubos que tenga dicho cuerpo. Observa el ejemplo.

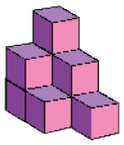
			
3 cubos Todos están a la vista.	**4 cubos** Con el oculto debajo del más alto.	**12 cubos** 6 en la parte delantera y 6 en la trasera.	**7 cubos** 2 parte superior 5 en la inferior (3 a la vista y 2 ocultos).

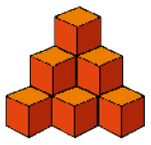
Para que resulte más sencillo contar los cubos, hazlo por niveles o plantas, incluyendo los que no se ven.

1 Calcula el número de cubos que forman el volumen de estos cuerpos.

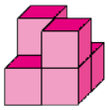
a) 

b)

c) 

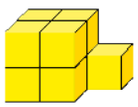
d) 

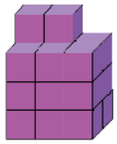
Otra forma es completando la figura con lo que falta, calcular el alto, ancho y fondo.

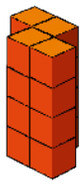


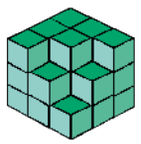
6 cubos
Faltan 2 cubos para completar un cuerpo de $2 \times 2 \times 2 = 8$.
Por tanto, $8 - 2 = 6$.

2 Calcula el número de cubos que forman el volumen de estos cuerpos completando y restando los que faltan.

a) 

b) 

c) 

d) 

Anotaciones

Pág. 145 Sugerencias metodológicas

La idea de introducir los cubos como una forma concreta de mostrar la unidad de medida se ha comprobado muy fructífera en las aulas en que se ha aplicado. Por un lado hace normal la medida de algo que, en cualquiera de los estados de la materia, puede tener formas muy diversas. El aire, ¿qué forma tiene? ¿Y las piedras? ¿Y un montón muy grande de trigo? Por ello, el cubo, que puede ser repetido muchísimas veces, o bien que puede alcanzar un tamaño menor o mayor en función de su arista, pone un poco de orden en la conceptualización de la medida. Y en segundo lugar los cubos permiten que se tome en cuenta la medida de lo oculto. De hecho, en ejercicios de la página, averiguar cuántos cubos hay ocultos (ejercicio 2) se convierte en una de las tareas.

Soluciones

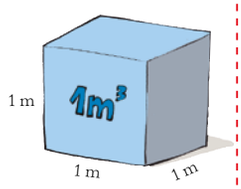
1. a) 10 cubos. b) 7 cubos. c) 9 cubos. d) 10 cubos.

2. a) 9 cubos $3 \times 2 \times 2 = 12$; $12 - 3 = 9$
b) 9 cubos $3 \times 4 \times 2 = 24$; $24 - 4 = 20$
c) 9 cubos $3 \times 4 \times 2 = 24$; $24 - 8 = 16$
d) 9 cubos $3 \times 3 \times 3 = 27$; $27 - 4 = 23$

Anotaciones

Equivalencia entre las unidades de volumen

El metro cúbico (m^3) es la unidad principal de volumen y corresponde al volumen de un cubo que mide un metro de lado.

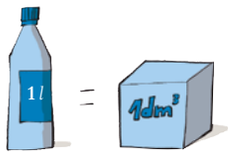


Las medidas lineales, como el metro, aumentan o disminuyen (múltiplos y submúltiplos) de 10 en 10; las medidas de superficie, de 100 en 100 y las medidas de volumen, de 1 000 en 1 000.

× 1 000	× 1 000	× 1 000	× 1 000	× 1 000	× 1 000	× 1 000
miriámetro cúbico **mam^3**	kilómetro cúbico **km^3**	hectómetro cúbico **hm^3**	decámetro cúbico **dam^3**	metro cúbico **m^3**	decímetro cúbico **dm^3**	centímetro cúbico **cm^3**	milímetro cúbico **mm^3**
: 1 000	: 1 000	: 1 000	: 1 000	: 1 000	: 1 000	: 1 000	

Los términos **volumen** y **capacidad** están muy relacionados. La capacidad es el espacio vacío que puede contener un líquido, un gas o un sólido.

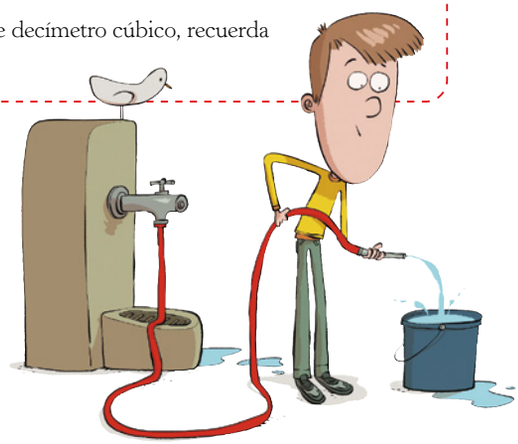
Esto hace que nos preguntemos cuál sería el espacio (volumen) que ocuparía un litro (unidad de capacidad) de agua.



Podemos comprobar que un recipiente cuyas aristas midan 1 dm (cuyo volumen es 1 dm × 1 dm × 1 dm = 1 dm^3) contiene exactamente 1 L.

VOLUMEN	1 m^3	1 dm^3	1 cm^3
CAPACIDAD	1 kL	1 L	1 mL

Como es más usual hablar de metro cúbico que de decímetro cúbico, recuerda la equivalencia.



1 Completa esta tabla en tu cuaderno.

548,2 m^3	…	L
45 m^3	…	L
6 714 dm^3	…	L
431 L	…	m^3
3 875,7 mL	…	dm^3

Pág. 146 Sugerencias metodológicas

En esta página, además de presentar los múltiplos y submúltiplos del metro cúbico (m^3), se plantean y diferencian los conceptos de volumen y capacidad. Para ello, si fuese necesario, podemos insistir en la idea de que la capacidad siempre va relacionada con la de un recipiente que contiene un espacio por llenar, en tanto que el volumen es el espacio en sí. Es decir, que un litro de cualquier líquido ocupa siempre el mismo espacio con independencia del recipiente que lo contenga o de que no esté en ningún recipiente.

Recordaremos, así mismo, como paso previo a tratar las unidades de volumen, las medidas de longitud y de superficie, haciendo hincapié en por qué estas medidas van respectivamente de 10 en 10 y de 100 en 100. Así pasaremos unidades cúbicas de uno, dos y tres dígitos a otros múltiplos y submúltiplos, empezando con patrones de cantidades y equivalencias sencillas e incrementando la dificultad progresivamente.

¿Cuántos m^3 son:

- 2 dm^3, 2 cm^3, 2 mm^3?
- 20 dm^3, 20 cm^3, 20 mm^3?
- 200 dm^3, 200 cm^3, 200 mm^3?
- 2 000 dm^3, 2 000 cm^3, 2 000 mm^3?
- 2 dam^3, 2 hm^3, 2 km^3?

Recordaremos las equivalencias entre m^3/litros y dm^3/litros, al objeto de relacionar ambas unidades de medida de capacidad.

Soluciones

1.

548,2 m^3	**548 200** L
45 m^3	**45 000** L
6 714 dm^3	**6 714** L
431 L	**0,431** m^3
3 875,7 mL	**3,8757** dm^3

Conversiones entre unidades de volumen

Recordamos la equivalencia entre volumen y capacidad:

$1\ m^3 = 1\,000\ L$ $1\ dm^3 = 1\ L$

1 Averigua una curiosidad sobre el volumen. Realiza las conversiones de unidades de volumen que te indicamos y sustitúyelas en tu cuaderno por la palabra que corresponda.

De todos los cuerpos [5,22 dam³ (m³)] que tienen la misma [4 500 cm³ (m³)] total, el que [1,7 m³ (dm³)] un mayor volumen es la [5 000 dm³ (m³)]. Por eso las [15,2 cm³ (mm³)] de jabón son [0,05 dm³ (cm³)]: contienen la mayor cantidad de [2,5 m³ (dm³)] que se puede encerrar con esa [4 700 cm³ (dm³)] de jabón.

¡Cuidado! Quizá te sobre alguna clave.

Claves

0,004 5	superficie	50	esféricas	2 500	aire
4,7	lámina	52,2	existentes	5 220	geométricos
5	esfera	1 700	encierra	15 200	pompas

2 Haz lo mismo para completar en tu cuaderno la curiosidad del ejercicio anterior, pero ahora convertimos unidades de volumen a litros.

En dos [7,12 dm³], es el [45 000 mm³] el que encierra la [1,7 m³] superficie; por eso, si echas [125 cm³] encima del [1,5 m³] se forman [0,5 m³].

¡Cuidado! Quizá te sobre alguna clave.

Claves

1 500 L	agua	0,125 L	aceite	1 700 L	mayor
0,017 L	caras	7,12 L	dimensiones	500 L	círculos
0,045 L	círculo	15 L	líquidos		

3 Pasa a litros las siguientes unidades de volumen.

a) $10\ m^3$ b) $5{,}6\ dm^3$ c) $43\ cm^3$ d) $81\ dm^3$

Anotaciones

Pág. 147 Sugerencias metodológicas

1. De todos los cuerpos (5 220 m^3) **geométricos** que tienen la misma (0,0045 m^3) **superficie** total, el que (1 700 dm^3) **encierra** un mayor volumen es la (5 m^3) **esfera.** Por eso las (15 200 mm^3) **pompas** de jabón son (50 cm^3) **esféricas:** contienen la mayor cantidad de (2 500 dm^3) **aire** que se puede encerrar con esa (4,7 dm^3) **lámina** de jabón.

No corresponde a ninguna operación: 52,2 → existentes

2. En dos (7,12 L) **dimensiones,** es el (0,045 L) **círculo** el que encierra la (1 700 L) **mayor** superficie; por eso, si echas (0,125 L) **aceite** encima del (0,0015 L) **agua** se forman (500 L) **círculos.**

No corresponden a ninguna operación: 0,017 L → caras y 15 L → líquidos.

Textos completos:

De todos los cuerpos geométricos que tienen la misma superficie total, el que encierra un mayor volumen es la esfera. Por eso las pompas de jabón son esféricas: contienen la mayor cantidad de aire que se puede encerrar con esa lámina de jabón.

En dos dimensiones, es el círculo el que encierra la mayor superficie; por eso, si echas aceite encima del agua se forman círculos.

3. a) 10 000 L. b) 5,6 L. c) 0,043 L. d) 81 L.

Anotaciones

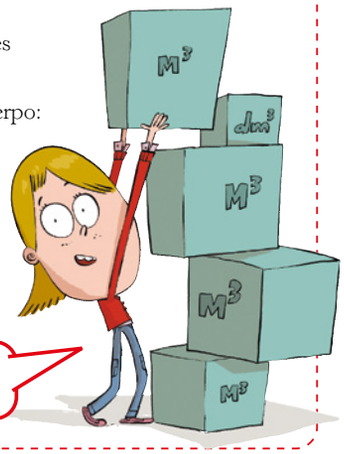
Formas complejas e incomplejas de las unidades de volumen

Una unidad de medida de forma incompleja es la que expresa una cantidad en una sola unidad de medida (25 m^3), mientras que de forma compleja se expresa en varias unidades de medida (20 m^3 y 5 000 dm^3).

Debes recordar que los múltiplos y submúltiplos de las unidades de volumen aumentan o disminuyen de 1 000 en 1 000.

Observa cómo podemos expresar el volumen que ocupa un cuerpo:

Forma incompleja	Formas complejas	
856,75 m^3	856 m^3	750 dm^3
	850 m^3	6 750 dm^3
	800 m^3	56 750 dm^3
	100 m^3	756 750 dm^3



1 Escribe de forma compleja estas unidades de volumen.

a) 5,68 m^3 b) 473,9 dam^3 c) 24,156 cm^3 d) 4 567 dm^3

2 Pasa a otra forma compleja distinta, estas medidas de volumen. Observa el ejemplo.

a) 8 m^3 213 dm^3 = 8,2 m^3 y 13 dm^3

b) 25 dam^3 27 m^3 = … dam^3 y … m^3

c) 345 dm^3 3 567 cm^3 = … dm^3 y … cm^3

d) 42,8 dam^3 4 567 m^3 = … dam^3 y … m^3

3 En las siguientes expresiones complejas tienes unidades de volumen y de capacidad. Exprésalas de forma incompleja en metros cúbicos teniendo en cuenta sus equivalencias. Observa el ejemplo:

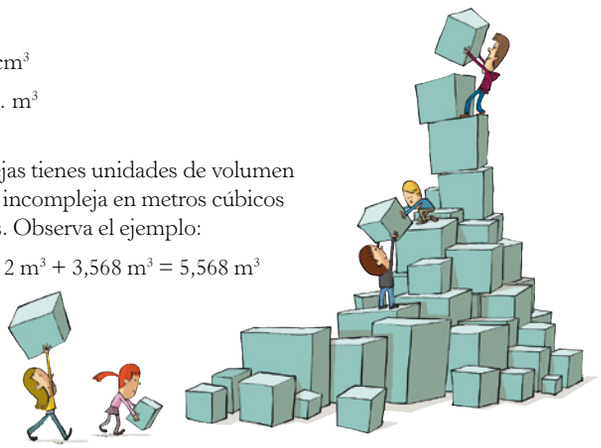
a) 2 m^3 3 568 L = 2 m^3 + 3 568 dm^3 = 2 m^3 + 3,568 m^3 = 5,568 m^3

b) 5,3 dm^3 0,7 L

c) 0,035 dam^3 6 000 L

d) 0,331 dam^3 23 000 L

e) 7,42 m^3 63 dm^3 2 000 L



Pág. 148 Sugerencias metodológicas

La única dificultad en este tipo de actividades, al igual que puede ocurrir con las unidades simples y cuadradas, es la confusión entre los términos complejo e incomplejo. Para abordarla, sugerimos que, al tratarse de un problema de lenguaje, se pongan ejercicios lingüísticos en los cuales se dé relevancia a ambos conceptos. Por ejemplo, un destornillador sería una herramienta incompleja, formada por una sola pieza, frente a un taladro eléctrico, formado por diferentes piezas que realizan una función cada una de ellas.

Soluciones

1. Respuesta libre. Por ejemplo:

a) 5 m^3 680 dm^3 c) 24 cm^3 156 mm^3

b) 473 dam^3 900 m^3 d) 4 m^3 567 dm^3

2. Respuesta libre. Por ejemplo:

b) 20 dam^3 y 5 027 m^3

c) 340 dm^3 y 8 567 cm^3

d) 43 dam^3 y 4 367 m^3

3. b) 0,005 3 m^3 + 0,000 7 m^3 = 0,006 m^3

c) 35 m^3 + 6 m^3 = 41 m^3

d) 331 m^3 + 23 m^3 = 354 m^3

e) 7,42 m^3 + 0,063 m^3 + 2 m^3 = 9,483 m^3

Equivalencias entre volumen y masa. Iniciación al concepto de densidad

Ya conocemos la equivalencia entre el volumen y la capacidad (1 dm^3 = 1 litro). Ahora vamos a ver la equivalencia entre el volumen y la masa.

Si pesáramos el litro de agua que cabe en un recipiente de 1 dm^3, comprobaríamos que su peso es exactamente de 1 kg. Por tanto, la equivalencia es muy sencilla:

1 dm^3 = 1 L = 1 kg de agua

VOLUMEN	1 m^3	1 dm^3	1 cm^3
CAPACIDAD	1 kL	1 L	1 mL
MASA	1 t (1 000 kg)	1 kg	1 mg

Si en lugar de agua pura pesamos 1 L (o 1 dm^3) de otros líquidos, comprobaremos que la relación entre las medidas de peso y volumen no es constante. Puedes hacer la prueba pesando botellas de 1 L de aceite, de refresco, de yogur líquido, etc.

Ejemplos:

- Un litro de aceite pesa aproximadamente 918 g.
- Un litro de gasolina pesa 760 g.
- Un litro de alcohol pesa 790 g.
- Un litro de agua de mar pesa 1 025 g.

Esto se debe a que el peso depende de una propiedad de la materia que llamamos **densidad.**

Recuerda

Tonelada (t) = 1 000 kg Quintal (q) = 100 kg

1 ¿Cuál es la masa (en kilogramos) de las siguientes cantidades de agua pura?

a) 1 t b) 1 q c) 250 cL d) 40 daL e) 15 dL

2 Expresa, en toneladas, la masa del agua que cabe en una cisterna de 5,6 hL de capacidad.

3 Indica el volumen (en metros cúbicos) y la masa (en kilogramos) del agua que cabe en los siguientes recipientes.

a) 2,5 L b) 2 L c) 1,5 L d) 1 L e) 0,5 L

Anotaciones

Pág. 149 Sugerencias metodológicas

A lo largo de la unidad, hemos reiterado, por su importancia, la equivalencia entre unidad de volumen y capacidad. En esta ocasión, vamos a presentar la equivalencia entre volumen y masa. Para ello, ofrecemos un ejemplo fácilmente realizable en el aula. Solo necesitamos agua, una balanza y un recipiente calibrado. Tras esta sencilla experiencia, habremos relacionado entre sí las tres unidades de medida, y únicamente deberemos realizar actividades de equivalencias entre ellas, al objeto de afianzar el nuevo aprendizaje.

Una vez realizado el experimento, preguntaremos al alumnado si ocurrirá lo mismo con otros líquidos. Para ello, tan solo necesitaremos sustancias fáciles de conseguir como aceite, agua salada o alcohol. En primer lugar, y sabiendo por el experimento anterior que un litro de agua pesa un kilo, mediremos un litro de estas sustancias y comprobaremos su peso. Así, podremos concluir que existe algo que cambia la equivalencia entre volumen y masa en estas sustancias. A esta propiedad de la materia la llamaremos densidad.

Soluciones

1. a) 1 000 kg b) 100 kg c) 2,5 kg d) 400 kg e) 1,5 kg

2. 0,56 t

3. a) 0,0025 m^3 y 2,5 kg
b) 0,002 m^3 y 2 kg
c) 0,0015 m^3 y 1,5 kg
d) 0,001 m^3 y 1 kg
e) 0,0005 m^3 y 0,5 kg

Anotaciones

Pág. 150 Sugerencias metodológicas

En el encabezado se establece un plan de acción para la resolución de este tipo de problemas basado principalmente en lo realizado en cursos anteriores con problemas de medida (longitud, capacidad y masa).

El plan que se ha venido proponiendo consiste en:

1. Lectura del enunciado tantas veces como sea necesario.

2. Representación gráfica incluyendo los datos relevantes.

3. Cambios de unidad, si es necesario. En este caso la pregunta puede indicar la unidad a la que hay que pasar todo. De no ser así, normalmente será mejor pasarlo todo a la unidad más pequeña.

4. Resolver.

5. Analizar y comprobar.

Los problemas que aparecen en la página se pueden clasificar en tres categorías:

- Los que se centran en las equivalencias entre volumen y capacidad, expresando los datos en unidades distintas. Son los problemas 1, 3, 4 y 6.
- Los que utilizan unidades de volumen como datos, pero en realidad son problemas comunes: problema 2.
- Problemas en los que se pide hallar el volumen de un prisma, como el problema 5. Aunque aún no se ha trabajado en profundidad sí se han ofrecido ciertas nociones básicas que permiten resolverlo.

RESUELVO PROBLEMAS

Problemas con unidades de volumen

Sigo los pasos y resuelvo el problema

Un camión cisterna transporta 6 m^3 de agua. Otro camión cisterna traslada 0,015 dam^3 de agua. ¿Qué camión transporta más agua, el primero o el segundo? ¿Cuántos litros más transporta?

1. Representación gráfica.

2. Cambio de unidad, si es necesario.

$6\ m^3 = \ldots\ L$ $\qquad$ $0{,}015\ dam^3 = \ldots\ L$

3. Realiza los cálculos necesarios y resuelve.

4. Analiza el resultado y comprueba.

Resuelvo problemas

1. En una piscina mediana caben 0,75 dam^3. ¿Cuántos litros de agua caben en esa piscina?

2. La piscina anterior se llena con 4 chorros, que salen de cada una de sus paredes. Cada chorro vierte 2 500 L de agua por hora. ¿Cuántas horas tarda en llenarse la piscina?

3. Una piscina grande mide 50 m de largo, 3 m de profundidad y 10 m de ancho. ¿Cuántos litros de agua contiene cuando está llena hasta el borde?

4. ¿Cuál es la diferencia, en metros cúbicos, entre la piscina mediana y la grande de los ejercicios anteriores?

5. Mi habitación mide 3 m de ancho, 2,5 m de alto y 5 m de largo. ¿Cuántos litros de aire caben en ella?

6. Un centímetro cúbico de zumo cuesta un céntimo de euro. Se ha comprado zumo por un valor de 30 €. El zumo viene en botellas de $\frac{1}{4}$ de litro. ¿Cuántas botellas se han comprado?

Invento, creo y razono

7. Resuelve el problema siguiente, inventa una nueva pregunta y resuélvela.

Los pantanos de la provincia de Cáceres embalsan aproximadamente 6 600 hm^3 de agua. Tras las lluvias, su volumen se ha incrementado un 2 %. ¿Cuántos metros cúbicos ha aportado la lluvia?

150

Soluciones

Encabezado: transporta más el segundo camión. 9 000 L más.

1. En la piscina caben 750 000 L de agua.

2. La piscina tarda 75 h en llenarse.

3. La piscina contiene 1 500 000 L de agua.

4. La diferencia entre la mediana y la grande es de 750 m^3.

5. En mi habitación caben 37 500 L de aire.

6. Se han comprado 4 botellas.

7. 132 000 000 m^3. Respuesta abierta.

Volumen y densidad

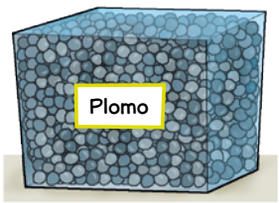
Como ya has visto con la relación entre la masa y el volumen, la densidad es una propiedad de la materia que influye en el peso de la misma.

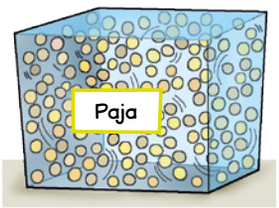
Habrás oído alguna vez la adivinanza: ¿qué pesa más, un kilo de plomo o un kilo de paja?

Si no te paras a pensar, seguro que dirás que el kilogramo de plomo. Y no es correcto. La respuesta correcta es que los dos pesan lo mismo. Un kilogramo pesa lo mismo que otro kilogramo.

Sin embargo, si te hubieran preguntado: ¿Qué ocupa más espacio, un kilogramo de plomo o un kilo de paja? La respuesta correcta es la paja, ya que necesitas más cantidad de paja que de plomo para tener un kilogramo.

Esto se debe a la cantidad de materia que hay en un mismo espacio: en el plomo es mayor que la que hay en el kilo de paja.





La densidad es la cantidad de materia (masa) que hay por unidad de volumen. Para calcular la densidad de una sustancia, se divide su masa entre el volumen que ocupa. Se mide en g/cm^3.

La densidad y el volumen tienen un relación inversa entre sí. A mayor densidad, menos volumen, y viceversa.

1 Observa la tabla de densidades de estos materiales y explica cuál de ellos ocupará un volumen mayor a cantidades iguales.

a) El agua o el aire.

b) El agua o el mercurio.

c) El hierro o el oro.

2 Explica, observando la tabla de densidades, por qué el hielo flota en el agua, si el hielo es agua congelada.

SUSTANCIA	DENSIDAD (G/CM^3)
Aire	0,001 3
Hielo	0,92
Agua	1
Agua de mar	1,04
Aluminio	2,7
Hierro	7,9
Cobre	8,9
Mercurio	13,6
Oro	19,3

Anotaciones

Pág. 151 Sugerencias metodológicas

En la Presentación de la unidad, en Educación en valores, hemos hecho referencia a la actividad que desarrollamos aquí. Es muy común dejarnos llevar por las apariencias y el hecho de saber que el plomo pesa mucho en comparación con la paja, seguramente, les llevará a obviar el dato de que hablamos en ambos casos de la misma masa y que lo que, en conclusión, variará entre ambas, es el volumen que ocupan ambos materiales.

Con esta sencilla actividad, introducimos el concepto de densidad del que ya hemos hablado en la página 156. Dicho concepto no es fácil de entender por parte del alumnado, por lo que sugerimos repasar los experimentos caseros que describimos allí. Así mismo, en el último apartado del recuadro, se hace referencia a la relación inversa entre la densidad y el volumen que ocupan las partículas de cada material, por lo que sugerimos evidenciar este concepto con imágenes conocidas, similares al ejemplo de la paja y el plomo que se ilustra en la página.

Soluciones

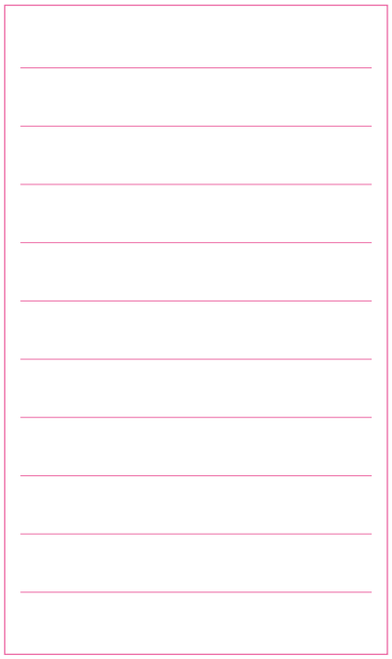
1. a) El aire.

b) El agua.

c) El hierro.

2. El hielo flota en el agua debido a que su densidad es menor que la del agua.

Anotaciones



RESUELVO PROBLEMAS

Problemas sobre volumen y densidad

Sigo los pasos y resuelvo el problema

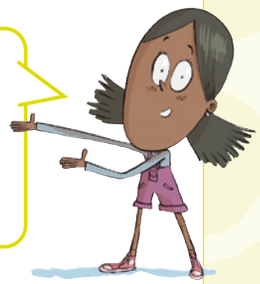
¿Cuántos kilogramos pesan 3 t de hielo?

1. Cambio de unidad si es necesario.

   3 t = … kg

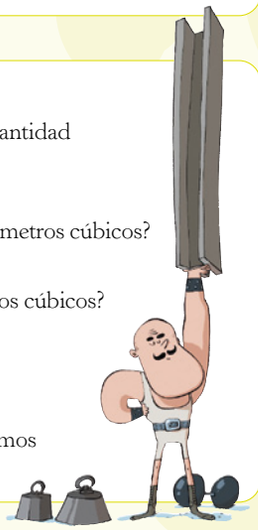
2. Realiza los cálculos oportunos y resuelve.
3. Analiza el resultado y comprueba.

Utiliza la calculadora si lo consideras necesario. Todas las densidades que necesitas para hacer estos problemas las tienes en la tabla de la página anterior.



Resuelvo problemas

1. ¿Cuántos decímetros cúbicos de aire son necesarios para que esa cantidad de aire pese 13 g?
2. Un bloque de aluminio pesa 5 400 kg. ¿Cuál es su volumen en decímetros cúbicos?
3. Una viga de hierro pesa 1 975 kg. ¿Cuál es su volumen en decímetros cúbicos?
4. Si 3 m^3 pesan 26,7 t, ¿de qué metal estamos hablando?
5. Un termómetro antiguo utilizaba 2 cm^3 de mercurio. ¿Cuántos gramos pesaba ese mercurio?

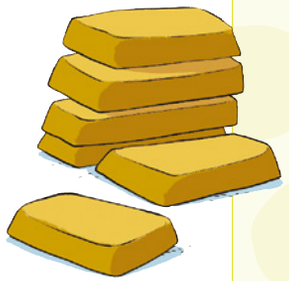


Invento, creo y razono

6. El oro es un metal muy valioso. La calidad del oro se mide por quilates. El oro puro tiene 24 quilates. Un anillo, por ejemplo, en el que la mitad de su metal sea oro puro, se califica como de 12 quilates. Teniendo en cuenta lo anterior, resuelve:

   a) Un gramo de oro puro cuesta 38 €. Unos pendientes de oro de 24 quilates tienen un volumen equivalente a 5 cm^3. ¿Cuál será su precio?

   b) ¿Cuánto costarían los anteriores pendientes si el oro del que están hechos fuera de 18 quilates?



152

Pág. 152 Sugerencias metodológicas

Contiene siete problemas sobre densidad, con diferente nivel de dificultad. Al igual que en unidades anteriores, es aconsejable realizar los cálculos de los problemas con la calculadora. No nos cansamos de repetirlo: se trata de que los alumnos entiendan el problema y, por tanto, los cálculos que se han de elegir para resolverlo, pero no se trata de que el problema sea la excusa para realizar cálculos.

Salvo el último problema, los demás presentan una dificultad media. No obstante puede ocurrir que haya casos en los que los alumnos no encuentren la solución o sigan caminos equivocados. Si es esa la situación, el docente debe abordar el problema de manera grupal, con toda la clase.

Soluciones

Encabezado: 3 000 × 0,92 = 2 760 kg.

1. Son necesarios 10 000 dm^3 de aire.
13 : 0,0013 = 10 000

2. Su volumen es de 2 000 dm^3.
5 400 : 2,7 = 2 000

3. Su volumen es de 250 dm^3
1 975 : 7,9 = 250

4. Estamos hablando del cobre.

5. El mercurio pesaba 27,2 g.
13,6 × 2 = 27,2 g.

6. a) El precio de los pendientes será de 3 667 €.
5 × 19,3 = 96,5 96,5 × 38 = 3 667 €.

b) Costarían 2 750,25 €.
18 quintales son $\frac{3}{4}$ de 24 quintales.
Si con lo anterior nos hemos gastado 3 667 €.
Ahora sería $\frac{3}{4}$ de 3 667 = 2 750,25 €.

Extensión del concepto de densidad. Densidad de población

Siguiendo con la idea de la densidad (cantidad de materia en un volumen determinado), en estadística se emplea el término de densidad de población que indica la relación que existe entre el número de habitantes de un lugar y el espacio que ocupa.

Gracias a este término podemos comparar la población de unas zonas con otras. Para calcular la densidad de población dividimos el número de habitantes entre el área donde habitan (km²). La unidad de medida para la densidad de población es la de **habitantes por km²**.

$$\text{Densidad de población} = \frac{\text{Número de habitantes}}{\text{Superficie (km}^2\text{)}}$$

En el año 2021 la densidad de población de España era de 94 hab/km².
Esto significa que, si repartiésemos los 47 394 223 habitantes de España entre los 505 990 km² de su superficie, en cada kilómetro cuadrado habría aproximadamente 93,52 habitantes.

1 Observa los datos de estas comunidades autónomas y calcula la densidad de población de aquellas en las que no aparece. Puedes usar la calculadora.

2 Con todos los datos de la densidad de población, contesta las siguientes preguntas.

a) ¿Cuáles son las comunidades autónomas con mayor densidad de población?

b) ¿Cuáles son las dos comunidades autónomas con más habitantes?

c) ¿Qué puedes decir de la superficie de las dos comunidades autónomas más pobladas y con la densidad de población más pequeñas?

d) ¿Cómo se explica que haya comunidades autónomas con parecida densidad de población pero distinto número de habitantes?

COMUNIDAD AUTÓNOMA	HABITANTES	SUPERFICIE KM²	DENSIDAD DE POBLACIÓN
Andalucía	8 472 407	87 599	97,05
Cataluña	7 763 362	32 113	238,84
C. de Madrid	6 751 251	8 028	…
C. Valenciana	5 058 138	23 255	216,98
Galicia	2 695 645	29 575	…
Castilla y León	2 383 139	94 224	25,34
País Vasco	2 213 993	7 234	302,13
Canarias	2 172 944	7 447	301,39
Castilla-La Mancha	2 049 562	79 461	25,79
Región de Murcia	1 518 486	11 314	133,74
Aragón	1 326 261	47 720	27,90
Islas Baleares	1 173 008	4 992	…
Extremadura	1 059 501	41 634	25,41
Principado de Asturias	1 011 792	10 604	95,53
C. Foral de Navarra	661 537	10 391	63,30
Cantabria	584 507	5 321	109,74
La Rioja	319 796	5 045	62,67
Melilla	86 261	12	…
Ceuta	83 517	20	4 175,10
Melilla	86 261	12	…
Ceuta	83 517	20	4 175,10

Anotaciones

Pág. 153 Sugerencias metodológicas

El concepto de densidad de población es muy importante, también para las Ciencias Sociales. Permite establecer un referente comparativo común a todos los territorios. Se introduce el concepto y se ponen unos primeros ejemplos. Enseguida se pasa a la aplicación del mismo a estadísticas reales.

Soluciones

1.

COMUNIDAD AUTÓNOMA	HABITANTES	SUPERFICIE (km²)	D.P.
C. de Madrid	6 751 251	8 028	841,15
Galicia	2 695 645	29 575	91,19
Islas Baleares	1 173 008	4 992	244,27
Melilla	86 261	12	7 001,58

2. a) Melilla, Ceuta y C. Madrid.

b) Andalucía y Cataluña.

c) Son las menores de todas, con mucha diferencia.

d) Si, depende de que la superficie sea mayor o menor y que la población sea a la inversa.

Anotaciones

TAREA COMPETENCIAL

Potingues y experimentos

Adrián es uno de tantos y tantos niños a los que en fiestas y celebraciones les encanta acabar mezclando los restos de refrescos, zumos, *snacks*, y todo lo que encuentra en un mismo recipiente para elaborar sus propios potingues. **Acompáñale es sus experimentos y predice cuál será el resultado final.**

1 El primero de sus potingues consta de una mezcla de refresco de cola, aceite de oliva, vinagre, agua y leche entera. Teniendo en cuenta la tabla de densidades, indica cómo quedarán ordenados estos líquidos dentro de un mismo recipiente.

a) Refresco, aceite de oliva, vinagre, agua y leche entera.

b) Vinagre, aceite de oliva, refresco, agua y leche entera.

c) Refresco, leche entera, vinagre, agua y aceite.

SUSTANCIAS	DENSIDADES
Vinagre	1,025 g/cm^3
Aceite de oliva	0,92 g/cm^3
Agua	1 g/cm^3
Leche entera	1,03 g/cm^3
Refresco	1,04 g/cm^3

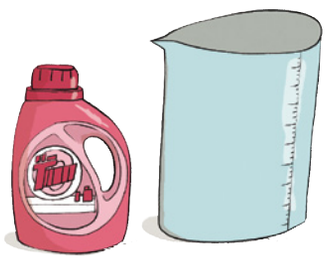
2 En el segundo experimento, Adrián decide llenar un vaso y echar dentro diferentes restos de comida para comprobar su flotabilidad. Indica, según su densidad el orden en el que se situarían (flota, sumergido parte superior, media o en el fondo).

SUSTANCIAS	DENSIDADES
Manzana	0,9 g/cm^3
Zanahoria	1,1 g/cm^3
Hielo	0,92 g/cm^3
Corcho	0,25 g/cm^3
Pepino	1,16 g/cm^3

3 Los experimentos han sido un éxito. Al llegar a casa, Adrián decide compartir sus hallazgos en su blog. Tras recibir un montón de «me gusta» decide lanzar un experimento para sus seguidores. Animaos y realizadlo todos juntos en clase:

Sin conocer las densidades de estas sustancias, averiguad cómo quedarían ordenadas echándolas a un recipiente.

- Agua con sal.
- Miel.
- Detergente líquido.



154

Pág. 154 Sugerencias metodológicas

Esta no es una tarea competencial «al uso», sino que pretendemos ir un poco más allá. ¿Hasta dónde? Hasta estudiar la forma en que se plantean los resultados de las situaciones experimentales para aprender a deducir, ayudándonos de la lógica que extraemos de los conocimientos aprendidos.

Se recomienda realizar los experimentos por grupos en clase y comprobar que las sustancias y objetos se «ordenan» según lo que se ha formulado anteriormente.

Soluciones

1. Opción c).

2. Pepino, zanahoria, hielo, manzana y corcho.

3. Detergente, agua con sal y la miel.

REPASO

1 He configurado una cámara digital para hacer fotos de 4 Mb. Si la tarjeta de memoria es de 64 Mb, ¿cuántas fotos podré almacenar? ¿Y si la tarjeta es de 8 Gb?

2 Calcula cuánto tarda la luz del Sol en llegar a la Tierra si la distancia es de 150×10^6 km, y su velocidad, 3×10^8 m/s.

3 Estos son los datos de la longitud de varias células sanguíneas. Copia y completa la tabla en tu cuaderno.

CÉLULA	mm	µm	nm	pm
Trombocitos	…	8,1	…	…
Linfocitos	…	…	6×10^3	…
Neutrófilos	…	…	…	$9{,}3 \times 10^6$

4 Pasa a litros las siguientes medidas.

a) 9 dam^3 150 m^3 c) 0,25 hL

b) 0,000004 hm^3 d) 500 000 mm^3

5 Expresa de forma incompleja.

a) 35 hm^3 426 dam^3 38 m^3 a dam^3 c) 552 dm^3 159 cm^3 120 mm^3 a cm^3

b) 8 dam^3 400 m^3 a m^3 d) 832 hm^3 832 dam^3 a hm^3

6 ¿Qué pesará más, un kilo de agua o uno de hielo? ¿Cuál ocupará más espacio?

7 En la siguiente tabla te damos los habitantes y la extensión de varios países europeos. Ordénalos de mayor a menor densidad de población.

PAÍS	N.º HABITANTES	SUPERFICIE (KM^2)	DENSIDAD DE POBLACIÓN (HAB/KM^2)
Francia	67 407 241	675 417	…
Finlandia	5 549 184	338 145	…
Malta	475 700	316	…
Alemania	83 155 031	357 375	…

Anotaciones

Pág. 155 Soluciones

1. Podré almacenar 16 fotos. Con 8 Gb, 2 048 fotos.

2. La luz tarda 8 minutos y 20 segundos en llegar a la Tierra.

3.

CÉLULA	MM	µ M	NM	PM
Trombocitos	$8{,}1 \times 10^{-3}$	8,1	$8{,}1 \times 10^{-3}$	$8{,}1 \times 10^{-3}$
Linfocitos	6×10^{-3}	6	6×10^{-3}	6×10^{-3}
Neutrófilos	$9{,}3 \times 10^{-3}$	9,3	$9{,}3 \times 10^{-3}$	$9{,}3 \times 10^{-3}$

4. a) 915 0000 L b) 25 L c) 4 000 L d) 500 L

5. a) 35 426,038 b) 592 159,12 c) 8 400 d) 832,832

6. Los dos pesan lo mismo. Ocupa más espacio el hielo.

7.

PAÍS	N.º HABITANTES	SUPERFICIE (km^2)	D.P. ($HAB./km^2$)
Francia	67 407 241	675 417	121
Finlandia	5 549 184	338 145	16
Malta	475 700	316	1 457
Alemania	83 155 031	357 375	233

10 VOLUMEN DE LOS CUERPOS GEOMÉTRICOS

Presentación de la unidad

Esta unidad se centra en el concepto de volumen en formas geométricas importantes y en las fórmulas utilizadas para calcularlo. Abarca prismas, pirámides y octaedros, así como cilindros, conos y esferas. El objetivo es que los niños y niñas tengan una comprensión básica antes de pasar a temas más complejos durante la enseñanza secundaria.

También se ha incluido, con la finalidad de asentar otro contenido muy importante y que se trabajará a fondo en la ESO: la jerarquía de operaciones. Se dedican a ello dos páginas, en las que se repasa intensamente lo que ya se ha aprendido en unidades y cursos anteriores

Sugerencias metodológicas

Con carácter general se recomienda que todos los cálculos que se hayan de hacer para calcular los volúmenes de los diversos cuerpos geométricos se realicen con la calculadora. Como tantas veces hemos dicho, el tratamiento del volumen no es una excusa para que los niños hagan cuentas difíciles, sino que tiene un fin en sí mismo y el cálculo del mismo tiene una finalidad más instrumental.

En secundaria se estudian con más detalle las áreas y los volúmenes de los cuerpos geométricos. No es necesario memorizar fórmulas para hallar su volumen; los cálculos deben hacerse utilizando una calculadora, sin perder de vista la fórmula en ningún momento. Los alumnos y alumnas sólo necesitan comprender las nociones generales, ya que adquirirán conocimientos más especializados más adelante, cuando comprendan mejor las matemáticas y otros aspectos que dan sentido a los volúmenes, como el área lateral y total, que pueden volverse complejos con los objetos redondos.

Comprender el orden de las operaciones en cálculos complejos que incluyen varios tipos es esencial para muchos conceptos algebraicos. Esta página hace hincapié en la memorización y automatización de cinco pasos para lograr este objetivo.

Resolución de problemas

El contenido sobre resolución de problemas está muy subordinado al tema principal de la unidad: los volúmenes de los cuerpos geométricos. No solo aparecen los problemas y ejercicios lógicos en las páginas de presentación de los contenidos, sino que se dedican páginas específicas a la resolución de estos problemas. Así, en el caso de los prismas y poliedros hay tres páginas de problemas, más la correspondiente a la Tarea competencial. Y otras tres páginas específicas se dedican a la resolución de problemas que tienen que ver con los volúmenes de los cuerpos redondos estudiados.

Educación en valores

Estamos en la recta final del curso y de la etapa educativa. Muchos alumnos y alumnas han compartido durante años amigos y compañeros; algunos continuarán compartiéndolos en la ESO, pero, sin duda, el cambio supondrá dejar amistades atrás. Por ello, sugerimos trabajar en esta unidad el valor de la amistad.

En muchas ocasiones, la amistad comienza de improviso y, a veces, sin buscarla, pero la convivencia diaria en el colegio propiciará que surja con más facilidad. Siempre necesitamos de alguien en quien confiar, con quien hablar, estar a gusto y compartir sentimientos, aficiones, opiniones, creencias y proyectos.

En estos momentos, puede que más de un estudiante se esté planteando que el paso de nivel implicará la pérdida de amigos o amigas. Sin embargo, habría que dialogar sobre si podemos llamar amistad a una relación sustentada en la conveniencia y convivencia, o si, por el contrario, amigos son aquellas personas que aunque no estén cerca físicamente, se saben, unidas y cuando vuelven a reunirse es como si no se hubiesen separado.

Por ello, sugerimos trabajar la amistad no como un comercio del que obtener ventajas o beneficios, sino como una entrega desinteresada, como saber perdonar, empatizar y estar ahí cuando sea necesario, aunque no se esté físicamente.

Este trance de final del curso es un buen momento para reflexionar sobre cómo cuidar y fomentar la amistad, ya que se trata de algo muy necesario para nuestro desarrollo como personas.

Recursos y materiales recomendados

Para el trabajo con los cuerpos geométricos, se dispone de una gran cantidad de recursos para imprimir en el blog actiludis.com, en el enlace: http://www.actiludis.com//?s=cuerpos+ geom%-C3%A9tricos.

Sugerimos igualmente como recurso para introducir esta unidad, trabajar con el cubo de Rubik y el «Cubo Soma». Para ello, deberán establecer un modo de notación de los movimientos y la secuenciación de pasos y metas.

En cuanto al «Cubo Soma», se trata de un rompecabezas de disección sólido que consta de siete piezas hechas de cubos

unitarios para montar en un cubo de 3 × 3 × 3, pero que además nos permite usarlas para hacer una gran variedad de figuras tridimensionales.

- Solución gráfica del cubo de Rubik.
- Documentación con propuestas de imágenes 3D con el «Cubo Soma».
- Cómo resolver el cubo de Rubik.
- Actividades y sugerencias para trabajar el «Cubo Soma».
- Solución del «Cubo Soma».

Pensamiento computacional

Cálculo mental:

Repaso y afianzamiento del cálculo mental requerido para que se dominen las divisiones de dos cifras con decimales con rejilla. Repasaremos también la suma y resta de fracciones.

- Mitades: el dominio de las mitades (con decimales) es esencial para la elaboración de las escalas.
  - Fomentar el uso de la descomposición como medio para hallar las mitades correspondientes.
- Dobles: cálculo de dobles con números de tres o cuatro cifras con decimales.
  - Fomentar el uso de las siguientes estrategias: por descomposición, sumando o multiplicando por dos.
- Resta de tres y cuatro cifras con decimales con rebasamiento.
- Fracciones: sumas y restas de fracciones con diferente denominador.

Esquema

Volumen de los cuerpos geométricos

Operaciones

- Jerarquía de las operaciones.

Geometría

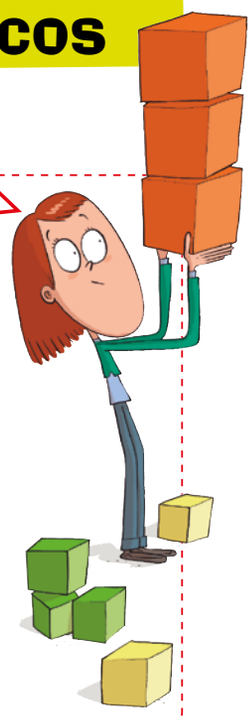
- Concepto de volumen. Repaso.
- Los poliedros. Los poliedros regulares.
- Volúmenes del prisma, la pirámide y el octaedro.
- Volúmenes de los cuerpos redondos.
- Volúmenes del cilindro, del cono y de la esfera.

Problemas

- Problemas sobre volúmenes en prismas.
- Problemas sobre volúmenes del cilindro, del cono y de la esfera.

Anotaciones

10 VOLUMEN DE LOS CUERPOS GEOMÉTRICOS



Usa la calculadora en aquellos problemas de esta unidad en los que las cantidades sean altas.

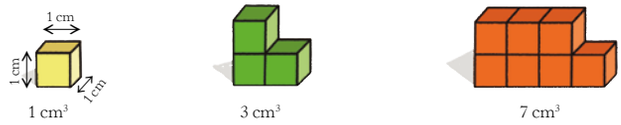
El volumen

Las situaciones de la vida real en las que necesitarás calcular volúmenes son múltiples: para saber la cantidad de agua de lluvia que ha caído la capacidad del maletero del coche, de un frigorífico, etc.

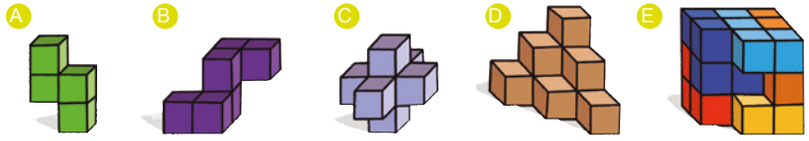
En esta unidad vamos a enseñarte a calcular volúmenes, para lo cual partiremos de los más sencillos.

Los cuerpos ocupan un espacio o volumen que medimos con unidades cúbicas. Para calcular el volumen de un cubo de 1 centímetro de lado, multiplicamos su ancho, su largo y su alto.

Volumen cubo = 1 cm × 1 cm × 1 cm = 1 cm^3



1 Completa en tu cuaderno la siguiente tabla con los volúmenes de estos cuerpos geométricos.



LADO DEL CUBO	A	B	C	D	E
1 cm	4 cm^3	…	…	…	…
2 cm	…	…	56 cm^3	…	…
3 cm	…	…	…	…	…

2 Estas tres figuras tienen todas un volumen de 4 cm^3. Dibuja en tu cuaderno otras tres figuras distintas que tengan el mismo volumen.

156

Pág. 156 Sugerencias metodológicas

Iniciamos el tema con situaciones de la vida real en las que es necesario tomar medidas de volúmenes y cómo ha de realizarse la medida de esos volúmenes. Para ello, puede ser interesante recordar que, como cuando medíamos superficies irregulares, también podemos emplear la técnica de medir, en este caso, a partir de volúmenes regulares conocidos.

Las actividades propuestas no solo nos serán útiles para calcular volúmenes, sino también para trabajar el razonamiento espacial, ya que parte del alumnado no tiene un buen razonamiento de este tipo así como tampoco realizan actividades para ejercitar esta destreza. Para ello, recordamos que en el apartado de Recursos y materiales recomendados hemos apuntado varios enlaces para trabajar el cubo de Rubik y el «Cubo Soma».

Soluciones

1.

LADO DEL CUBO	A	B	C	D	E
1 cm	4 cm^3	**6 cm^3**	**7 cm^3**	**9 cm^3**	**23 cm^3**
2 cm	**32 cm^3**	**48 cm^3**	56 cm^3	**73 cm^3**	**184 cm^3**
3 cm	**108 cm^3**	**162 cm^3**	**189 cm^3**	**243 cm^3**	**621 cm^3**

2. Respuesta libre.

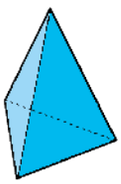
Repasamos los poliedros

Los poliedros son cuerpos geométricos cuyas caras son polígonos. Se clasifican en irregulares y regulares.

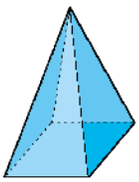
Poliedros irregulares

Son aquellos cuyas caras no son todas iguales. Hay dos tipos: pirámides y prismas.

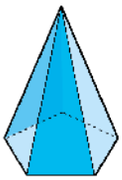
- Las **pirámides** tienen una sola base, que es un polígono cualquiera y del que reciben el nombre. Sus caras laterales son triángulos unidos en un vértice.



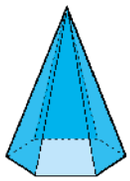
PIRÁMIDE TRIANGULAR
3 CARAS + BASE



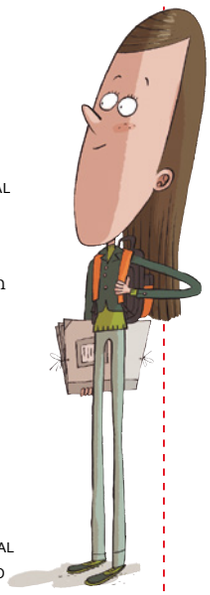
PIRÁMIDE CUADRANGULAR
4 CARAS + BASE



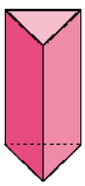
PIRÁMIDE PENTAGONAL
5 CARAS + BASE



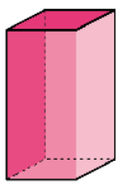
PIRÁMIDE HEXAGONAL
6 CARAS + BASE



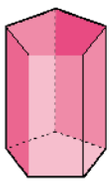
- Los **prismas** tienen dos bases iguales paralelas entre sí, y caras laterales que son paralelogramos. Se nombran por el polígono de sus bases.



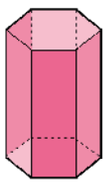
PRISMA TRIANGULAR
BASE: TRIÁNGULO



PRISMA CUADRANGULAR
BASE: CUADRILÁTERO



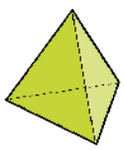
PRISMA PENTAGONAL
BASE: PENTÁGONO



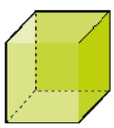
PRISMA HEXAGONAL
BASE: HEXÁGONO

Poliedros regulares

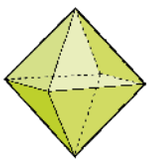
Son aquellos cuyas caras son polígonos regulares iguales. Existen cinco poliedros regulares:



TETRAEDRO
4 CARAS

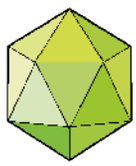


HEXAEDRO
6 CARAS



OCTAEDRO
8 CARAS

DODECAEDRO
12 CARAS



ICOSAEDRO
20 CARAS

Anotaciones

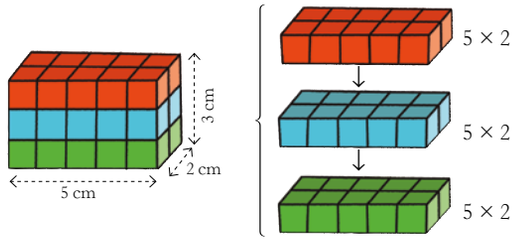
Pág. 157 Sugerencias metodológicas

En esta página se ofrece un resumen de los poliedros que el alumnado ya conoce de cursos anteriores, por lo que se trata de un recordatorio que podemos reforzar mediante juegos de tarjetas de memoria. A tal fin, reproduciremos en unas tarjetas los distintos cuerpos y, en otras, sus nombres o descripciones, colocándolas boca abajo para, por turnos, ir levantándolas y volver a taparlas si no hemos formado parejas.

Anotaciones

Volumen del prisma

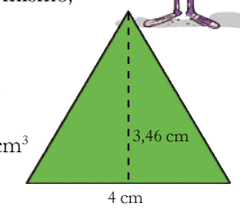
Para calcular el volumen, hemos visto que multiplicamos sus tres dimensiones: largo, ancho y alto. Hacer esto es lo mismo que multiplicar su área (largo y ancho) por la altura.



Recuerda:
a veces, el signo de multiplicar «×» lo sustituimos por un «·».
2 × 2 es lo mismo que 2 · 2.

El **volumen de un prisma** de base regular lo hallamos multiplicando el área de la base por la altura.

Me he fabricado un caleidoscopio de 12 cm de largo con forma de prisma triangular. La base del triángulo mide 4 cm, y la altura del mismo, 3,46 cm. ¿Cuál es el volumen que ocupa?



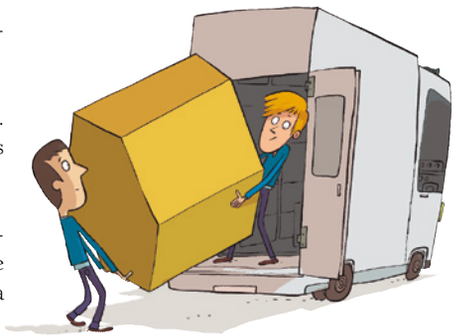
1. Hallamos el área del triángulo: $A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{4 \cdot 3{,}46}{2} = 6{,}92\ cm^2$
2. Calculamos el volumen: V = área · altura = $6{,}92\ cm^2 \cdot 12\ cm = 83{,}04\ cm^3$

1. Calcula el volumen de agua que cabe en una pecera de 50 cm de largo, 25 cm de ancho y 20 cm de alto.

2. Halla el volumen de un prisma cuadrangular cuya altura es de 12 cm y la arista de su base mide 4 cm.

3. El volumen de un prisma cuadrangular es de 210 cm^3. La base tiene unas dimensiones de 6 × 5 cm. ¿Cuál es su altura?

4. ¿Qué capacidad mínima en litros debe tener un camión para transportar una caja que tiene forma de prisma hexagonal? El largo de la caja mide 2,5 m; la base, 1,49 m de lado, y su apotema, 1,29 m.



Pág. 158 Sugerencias metodológicas

Recomendamos que el docente indique al alumnado que vaya anotando en una tabla los nombres de los distintos cuerpos geométricos y la fórmula para calcular su volumen. La creación de esa tabla (similar a la que se facilita en esta página) le ayudará a memorizar las fórmulas y a verificar las semejanzas y diferencias entre unos y otros cuerpos.

El cálculo del volumen de prismas irregulares lo basaremos en el cálculo mediante cubos, tal como se trabajó en los libros del método ABN de cursos anteriores, trasladando este cálculo a su generalización, con medidas de largo, ancho y alto, no existiendo ninguna dificultad significativa respecto a su comprensión.

Recordamos y recomendamos el uso del programa en línea geogebra.org, que contiene recursos digitales muy apropiados para trabajar con cuerpos geométricos.

Soluciones

1. Cabe un volumen de agua de 25 000 cm^3 o de 25 L.

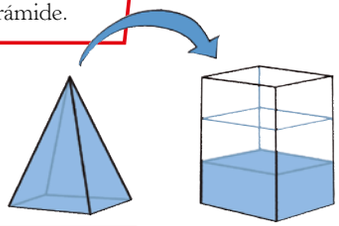
2. 192 cm^3.

3. 7 cm^3.

4. La capacidad mínima que debe tener el camión es de 14 415,7 L.

Volumen de la pirámide

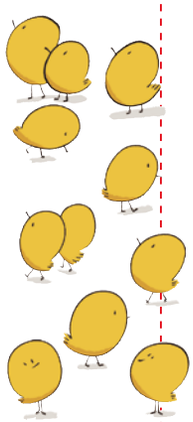
El **volumen de una pirámide** es la tercera parte del volumen de un prisma con la misma base y la misma altura que dicha pirámide.



La forma más rápida y fácil de comprobarlo es llenar de agua una pirámide con la misma base y altura que un prisma y verterla en él. Comprobarás que cabe, exactamente, esa cantidad de agua tres veces.

$$V_{prisma} = A \cdot h \qquad V_{pirámide} = \frac{V_{prisma}}{3} = \frac{A_{base} \cdot h}{3}$$

Donde A y h son la base y la altura del prisma y de la pirámide.



Calcula el volumen de la pirámide que acabamos de ver, cuya altura es 12 cm y cuyo lado de la base mide 10 cm.

1. Calculamos el volumen del prisma.
   - Primero el área de la base: $A_{cuadrado} = 10 \cdot 10 = 100 \text{ cm}^2$
   - Ahora el volumen: $V_{prisma} = A \cdot h = 100 \text{ cm}^2 \cdot 12 \text{ cm} = 1\,200 \text{ cm}^3$
2. Calculamos el volumen de la pirámide como la tercera parte de la del prisma.

$$V_{pirámide} = \frac{V_{prisma}}{3} = \frac{1\,200 \text{ cm}^3}{3} = 400 \text{ cm}^3$$

1. Una pieza de plástico con forma piramidal está apoyada en un triángulo rectángulo cuyo lado mide 5,4 cm y cuya altura es 7,2 cm. Si la altura de la pieza es de 8 cm, ¿cuál es su volumen?

2. Una pirámide de 8 cm de alto tiene de base un pentágono de 3 cm de lado y 2,1 cm de apotema. ¿Cuál es su volumen?

3. Calcula la capacidad de una tolva (depósito) de grano para alimentar a los pollitos de una granja sabiendo que tiene una altura de 120 cm. La base es un triángulo equilátero cuyo lado mide 70 cm y cuya altura es 60,62 cm.

Anotaciones

Pág. 159 Sugerencias metodológicas

Para la presentación del cálculo del volumen de la pirámide, y si contamos en el colegio con cuerpos geométricos transparentes con forma de pirámide y prisma de base cuadrangular, sugerimos realizar la experiencia que se ilustra, empleando para ello agua, arroz, alpiste, etc. Esta actividad les permitirá constatar físicamente la fórmula que se deduce a continuación.

Soluciones

1. El volumen de la pieza de plástico es de 51,84 cm^3.

2. El volumen de la pirámide es de 126 cm^3.

3. La capacidad de la tolva es de 254 604 cm^3, es decir, de 254,6 L.

Anotaciones

RESUELVO PROBLEMAS

Problemas de volúmenes en prismas

Sigo los pasos y resuelvo el problema

El edificio del Pentágono de EE. UU. tiene un perímetro de 1,4 km. Su apotema es de 193 m y la altura media de sus edificios es de 24 m. ¿Cuál es el volumen que ocupa el edificio?

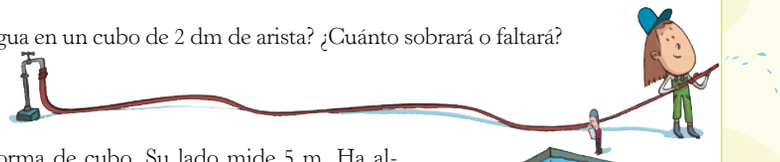
1. Representación gráfica.
2. Cambio de unidad, si es necesario.

   1,4 km = … m
3. Realiza los cálculos necesarios y resuelve.
4. Analiza el resultado y comprueba.

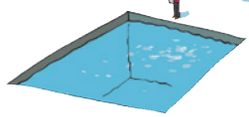
Resuelvo problemas

1. Un patio rectangular con unas dimensiones de 7 × 8 m se quiere cubrir con una capa de arena de 5 cm de grosor. ¿Cuántos metros cúbicos de arena necesitaremos?

2. ¿Cabrán 6 L de agua en un cubo de 2 dm de arista? ¿Cuánto sobrará o faltará?



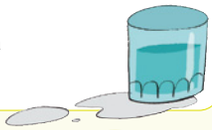
3. Un aljibe tiene forma de cubo. Su lado mide 5 m. Ha almacenado agua y la altura de esta llega a los 2 m. ¿cuántos metros cúbicos de agua hay en ese aljibe?



4. La pirámide de Keops tiene la base cuadrada. Su lado mide 230 m y su altura, 136 m. ¿Cuántos decámetros cúbicos de agua cabrían en la pirámide?

5. Un depósito de agua con forma de prisma cuadrangular, cuya base mide 2 × 3 m, está lleno hasta sus $\frac{2}{3}$ partes. Contiene 20 000 L de agua. ¿Cuál es la altura de ese depósito?

6. Un vaso tiene forma de prisma cuadrangular, con una arista de 5 cm y una altura de 15 cm. Si vertemos en él $\frac{1}{4}$ de litro de agua, ¿qué altura alcanzará el agua en el vaso?



160

Pág. 160 Sugerencias metodológicas

En el encabezado de la página 160 se establece un plan de acción para la resolución de este tipo de problemas basado principalmente en lo realizado en cursos y unidades anteriores. El docente debe hacer hincapié en la representación gráfica del cuerpo geométrico, anotando las medidas correctamente.

El plan que se ha venido proponiendo consiste en:

1. Lectura del enunciado tantas veces como sea necesario.
2. Representación gráfica incluyendo los datos relevantes.
3. Cambios de unidad, si es necesario.
4. Resolver.
5. Analizar y comprobar.

Cada una de las páginas contiene seis problemas. Sobre los mismos queremos señalar:

- Los problemas 1, 3 y 4 son de aplicación directa de la fórmula.
- El problema 2 también es de aplicación de la fórmula, pero además de hallar equivalencias entre el volumen y la capacidad.
- Los problemas 5 y 6 son los más difíciles de la página, puesto que se ha de averiguar la altura, y para ello hay que dividir el volumen (tres dimensiones) entre el cuadrado (dos dimensiones), para hallar una única dimensión (la altura). Lo mejor es hallar la solución invirtiendo la fórmula del volumen.

Soluciones

Encabezado: el volumen que ocupa el edificio es de 3 242 400 m^3.

1. Necesitamos 2,8 m^3 de arena.

2. Sí, caben 6 L. Sobrará espacio para otros 2 L.

3. En el aljibe hay 50 m^3 de agua.

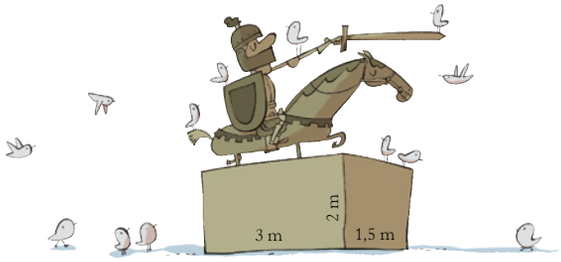
4. El volumen del armazón es de 1,95 m^3.

5. Su altura es de 5 m.

6. El agua alcanzará una altura 10 cm.

Resuelvo problemas

7 ¿Qué volumen de piedra tiene la base de esta escultura?



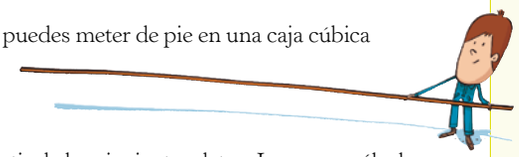
8 En un centro comercial han instalado un armazón para un árbol de Navidad con forma de pirámide hexagonal de 3 m de altura, 50 cm de lado de base y 43,3 cm de apotema. ¿Cuál es el volumen que ocupa el armazón?

9 El maletero de mi coche tiene una capacidad de 284 L. ¿Cuántas cajas de dimensiones 60 cm de largo, 40 cm de ancho y 35 cm de alto cabrán dentro? ¿Cuánto espacio, en centímetros cúbicos, me sobrará? Te recordamos que 1 L equivale a 1 dm^3.

10 Una jarra tiene forma de prisma cuadrangular con unas dimensiones de 10 × 10 × 20 cm. Está llena de agua hasta la mitad. Echamos dentro una manzana, y el agua sube 2 cm. ¿Cuál es el volumen de la manzana?

Invento, creo y razono

11 ¿Cuál es la longitud del mayor listón que puedes meter de pie en una caja cúbica que tiene 6 m de arista?
¿Cuál es el área de la caja?



12 Inventa un problema sobre volumen a partir de los siguientes datos. Luego resuélvelo.

Cubo	Arista 8 m	20 %

Anotaciones

Pág. 161 Sugerencias metodológicas

- Los problemas 7 y 8 son de aplicación directa de la fórmula.
- En el problema 9 se ha de hallar el volumen de cada caja. Posteriormente se divide la capacidad del maletero por la capacidad de cada caja para ver cuántas cabrían. El resto habrá que expresarlo en cm^3.
- El problema 10 es complejo. La manzana tiene el mismo volumen que el agua que desaloja, según el principio de Arquímedes, así que la densidad aquí no cuenta. Hay que hallar el volumen de agua que alcanza las dimensiones de 10 × 10 × 2.
- En el problema 11 el listón va de pie y, por ello, lo máximo que puede medir es 6 m. Para el área del cubo, se debe hallar el área de una cara y multiplicarlo por 6.

Soluciones

7. El volumen de la base de la escultura es de 9 m^3.

8. Cabrán en la pirámide 2 398,13 dam^3 de agua.

9. Caben 3 cajas. Me sobrará un espacio de 32 000 cm^3.

10. El volumen de la manzana es de 200 cm^3.

11. La longitud es 6 m. El área de la caja es de 216 m^2.

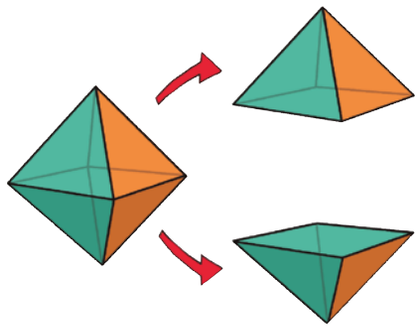
12. Respuesta abierta.

Anotaciones

Volumen del octaedro

Habrás observado que al cubo también se lo llama hexaedro y a la pirámide formada por cuatro triángulos equiláteros la llamamos tetraedro. Son dos de los cinco poliedros regulares, es decir, aquellos cuyas caras son todas polígonos regulares iguales.

Vamos a calcular el volumen de un tercer poliedro regular, el **octaedro,** formado por ocho triángulos equiláteros. Un octaedro son dos pirámides de base cuadrangular unidas por sus bases.



Para calcular el área de un octaedro, basta con calcular el área de la pirámide cuadrangular (que a su vez, como ya hemos visto, es la tercera parte del volumen de un prisma que tiene la misma base y la misma altura).

$$V_{octaedro} = 2 \cdot V_{pirámide} = \frac{2 \cdot A_{base} \cdot h}{3}$$

Calcula el volumen de un octaedro de 10 cm de arista y 24 cm de altura.

1 Calculamos el volumen del prisma cuyo lado mide 10 cm.

- Primero, el área de la base: $A_{cuadrado} = 10 \times 10 = 100\ cm^2$
- Ahora, el volumen: $V_{prisma} = A_{cuadrado} \cdot h = 100\ cm^2 \cdot 12\ cm = 1\,200\ cm^3$

2 Calculamos el volumen de la pirámide como la tercera parte de la del prisma.

$$V_{pirámide} = \frac{V_{prisma}}{3} = \frac{1\,200\ cm^3}{3} = 400\ cm^3$$

3 Y por último, el volumen del octaedro.

$$V_{octaedro} = 2 \cdot V_{pirámide} = 2 \cdot 400\ cm^3 = 800\ cm^3$$

Cuando hablamos de octaedro nos referimos a un octaedro regular, ya que hay otros octaedros que no tienen todas sus caras iguales como, por ejemplo, el que llamamos prisma hexagonal, como esta piscina.

1 Calcula el volumen de un octaedro regular de 5,3 cm de arista y 7 cm de altura de vértice superior a inferior.

Pág. 162 Sugerencias metodológicas

La comprensión de la obtención de la fórmula para el cálculo del volumen del octaedro no representa ninguna dificultad para el alumnado. Sin embargo, no ocurre lo mismo con la aplicación de dicha fórmula para el cálculo de volúmenes. La dificultad se debe tanto a la memorización de la fórmula como a la falta de orden y sistematización en la realización del cálculo por el olvido de algún dato o paso. Por ello, se deberá insistir en la sistematización que se muestra en esta página.

Soluciones

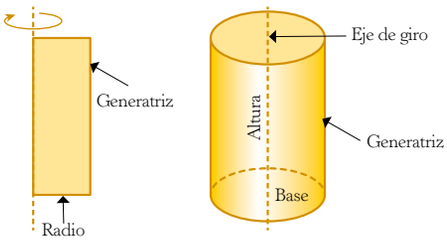
1. El volumen del octaedro es de 65,54 cm^3.

Volumen del cilindro

El cilindro es un cuerpo de rotación que se genera al girar un rectángulo sobre uno de sus lados.

El **volumen de un cilindro** es igual al producto del área del círculo de la base por su altura.

$$V_{cilindro} = A_{base} \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h$$



¿Cuál es el área total de un tubo de forma cilíndrica si el radio del círculo de la base mide 10 cm, y su altura 15 cm?

1. Calculamos el área de la base: $A_{círculo} = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 10^2 = 3{,}14 \cdot 100 = 314\ cm^2$
2. Y ahora el volumen: $V_{cilindro} = A_{base} \cdot h = 314\ cm^2 \cdot 15\ cm = 4\,710\ cm^3$

1. ¿Cuál es el volumen de un rollo de papel cuyo diámetro mide 24 cm y cuya altura es 22 cm?

2. Copia y completa la tabla con los datos de las golosinas que produce una fábrica.

PRODUCTO		LARGO	RADIO	VOLUMEN
Nubes de algodón		6 cm	1,5 cm	…
Gominolas rellenas		15 cm	…	47,1 cm^3
Palos de caramelo		…	0,5 cm	7,065 cm^3

3. ¿Cuál debe ser el volumen mínimo de una caja cilíndrica en la que se puede introducir un bote de 6 cm de radio y 28 cm de alto?

Anotaciones

Pág. 163 Sugerencias metodológicas

El volumen de un cilindro es fácilmente deducible para los alumnos y las alumnas a partir del cálculo en revolución de un rectángulo. Para ello, podemos tomar varios libros de texto del alumnado, cuyas páginas representarán los distintos rectángulos, y colocarlos de pie y pegados lomo con lomo hasta formar un círculo.

Con esta representación comprenderán fácilmente que el volumen del cilindro está en relación directa con la circunferencia que forman las bases de los libros y con la altura de los mismos. En resumen, se trata de la repetición, en vertical, del área del círculo formado por la altura del cilindro.

Soluciones

1. El volumen del rollo de papel es de 9 947,52 cm^3.

2.

PRODUCTO		LARGO	RADIO	VOLUMEN
Nubes de algodón		6 cm	1,5 cm	**42,39 cm^3**
Gominolas rellenas		15 cm	**1 cm**	47,1 cm^3
Palos de caramelo		**9 cm**	0,5 cm	7,065 cm^3

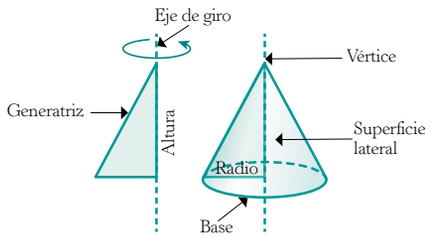
3. El volumen mínimo de la caja cilíndrica debe ser de 3 165,12 cm^3.

Anotaciones

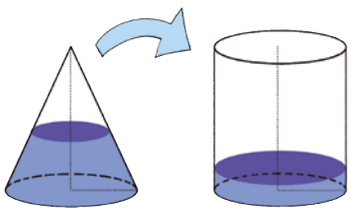
Volumen del cono

El cono es un cuerpo de rotación que se genera al girar uno de los lados menores de un triángulo.

El **volumen de un cono** es la tercera parte del volumen de un cilindro con la misma base y la misma altura que dicho cono.



Al igual que pasaba con la pirámide y el prisma, la forma más rápida y fácil de comprobarlo es llenar de agua un cono con la misma base y altura que un cilindro y verterla en él. Comprobarás que cabe exactamente, esa cantidad de agua tres veces.



$$V_{cono} = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{h}{3}$$

$$V_{cilindro} = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Un cucurucho de helado tiene una base circular cuyo radio mide 3 cm, y una altura de 10 cm. ¿Cuál es el volumen de helado que rellenaría el cucurucho?

1 Calculamos el volumen del cilindro:

$V_{cilindro} = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 3^2 \cdot 10 = \pi \cdot 9 \cdot 10 = \pi \cdot 90 = 282{,}6 \text{ cm}^3$

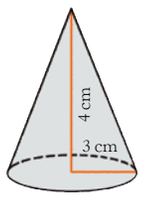
2 Y ahora, el volumen del cono:

$V_{cono} = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{h}{3} = \frac{V_{cilindro}}{3} = \frac{282{,}6}{3} = 94{,}2 \text{ cm}^3$

1 ¿Cuál es el volumen de un cono de 5 cm de radio y 12 cm de alto?

2 Una copa cónica tiene una capacidad de 2 dL. El radio mide 4 cm. ¿Cuál es su altura?

3 Calcula el volumen de este cono:



Pág. 164 Sugerencias metodológicas

Para comprender más fácilmente la posterior deducción de la fórmula para el cálculo del volumen del cono, recomendamos realizar la experiencia descrita con agua, arroz o semillas si contamos en el colegio con cuerpos geométricos transparentes de cono y cilindro de la misma base.

Al igual que hemos comentado para el cálculo del volumen del octaedro, en el cálculo del volumen de los cuerpos de revolución cilindro y cono, no existe ninguna dificultad en la comprensión de la deducción del cálculo del volumen. Sin embargo, los posibles errores y fallos vendrán igualmente por el olvido o la falta de sistematización y orden en la realización de los cálculos.

Soluciones

1. El volumen del cono es de 314 cm^3.

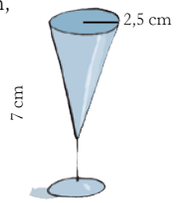
2. La altura de la copa es de 11,95 cm.

3. El volumen del cono es de 37,7 cm^3.

Problemas sobre volumen del cono y del cilindro

Sigo los pasos y resuelvo el problema

En una copa cónica cuyo radio mide 2,5 cm y cuya altura es 7 cm, ¿cuántos mililitros de agua caben?



1. Representación gráfica.
2. Calculamos el volumen de la copa.
3. Cambio de unidad.

   … cm^3 = … mL
4. Analiza el resultado y comprueba.

Resuelvo problemas

1. ¿Cuántos litros, decilitros y centilitros caben en un embudo cónico de 11 cm de radio y 18 cm de altura?

2. Una lata de tomate de forma cilíndrica tiene un radio en la base de 5 cm y una altura de 11 cm. En la fábrica quieren llenar 4 000 latas iguales. ¿Cuántos litros de tomate necesitan?

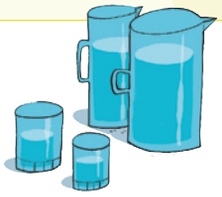
3. En un depósito de forma cilíndrica caben 628 L de agua. Su altura es 8 cm. ¿Cuál es el radio de la base?

4. Una cisterna cilíndrica tiene unas dimensiones de 2 m de radio y 16 m de altura. ¿Qué altura alcanza el agua en la cisterna si contiene 75 360 L de agua?

5. ¿Qué altura mínima debe tener un vaso cilíndrico cuyo diámetro mide 9 cm para que pueda contener 4 dL de agua sin que esta se derrame?

Invento, creo y razono

6. Dos jarras tienen la misma capacidad. Ambas son cilíndricas, pero tienen distintas dimensiones. Una de ellas tiene un radio que mide 4 cm, y su altura es 12 cm. La otra tiene un radio que mide 6 cm. ¿Cuál es la altura de la segunda jarra?



Anotaciones

Pág. 165 Sugerencias metodológicas

En el encabezado se establece un plan de acción para la resolución de este tipo de problemas basado principalmente en lo realizado en páginas anteriores, pero con una pequeña modificación. El cambio de unidad, en ocasiones, será mejor realizarlo al final, ya que implica un cambio de unidades de volumen a unidades de capacidad.

El plan que se propone consiste en:

1. Lectura del enunciado tantas veces como sea necesario.
2. Representación gráfica incluyendo los datos relevantes.
3. Resolver.
4. Cambios de unidad, si son necesarios.
5. Analizar y comprobar.

Problema 1. Es de aplicación directa de la fórmula, pero con transformación de medidas.

Problema 2. Es de aplicación directa de la fórmula para hallar el volumen de una lata. Tras ello habrá que multiplicar por el número de latas y convertir el resultado en litros.

Problema 3. Algo más complejo que los anteriores, puesto que se ha de hallar primero la base y, tras ello, el radio.

Problema 4. Conocemos el volumen asociado a la altura que se pide (75 360 L), por lo que se puede hallar la base. Posteriormente se efectúa la división entre el volumen y el área.

Problema 5. Similar al problema anterior.

Problema 6. Hay que hallar el volumen de la primera jarra, y como este es el mismo que el de la segunda jarra, ese dato nos permitirá hallar su altura.

Soluciones

Encabezado: en la copa caben 45,8 mL.

1. Caben 2,28 L, 22,8 dL y 228 cL.

2. Necesitarán 3 454 L de tomate.

3. El radio de la base mide 5 dm.

4. La altura que alcanza el agua en la cisterna es de 6 m.

5. La altura mínima debe ser de 6,22 cm.

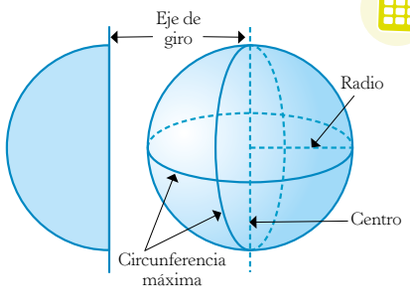
6. La altura de la segunda jarra es de 5,33 cm.

Anotaciones

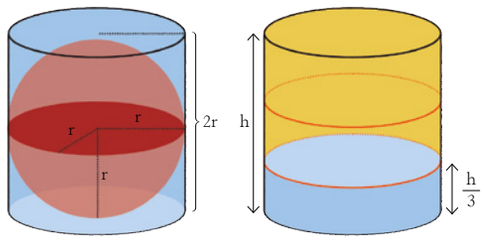
Volumen de la esfera

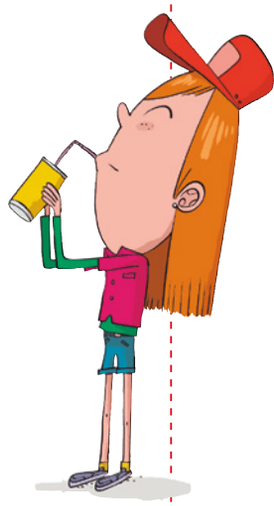
Una esfera es un cuerpo de revolución, que se genera haciendo girar una superficie semicircular sobre su diámetro.

Arquímedes demostró que el **volumen de la esfera** es igual a dos tercios del volumen del cilindro circular circunscrito a ella.



Lo verás fácilmente si introducimos la esfera dentro de un cilindro, de forma que se ajuste a ella. Es decir, nos imaginamos un cilindro de radio «r» y altura «2r». Si llenamos con agua el espacio que no está ocupado por la esfera en el cilindro y a continuación sacamos la esfera, veremos que el agua solo ocupa la tercera parte del cilindro.



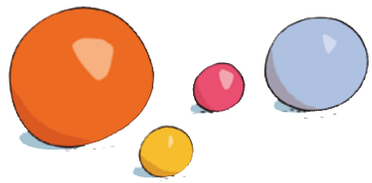


Por tanto, la **esfera** ocupa las **dos terceras partes del volumen del cilindro** que la contiene:

$$V_{esfera} = \frac{2}{3} \cdot V_{cilindro} = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot 2r = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3$$

¿Cuánto aire entraría en una esfera de 10 cm de radio?

$$V_{esfera} = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot 10^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot 100 = 418{,}66 \text{ cm}^3$$



1 Calcula el volumen de 4 esferas cuyo radio es…

a) 2 m b) 4 dm c) 8 cm d) 16 mm

Pág. 166 Sugerencias metodológicas

Para el cálculo del volumen de la esfera, podemos, al igual que con la pirámide y el cono, realizar la experiencia descrita con cuerpos de revolución transparentes. Esta actividad les permitirá observar físicamente la fórmula que se deduce a continuación.

Al igual que para el cálculo del volumen de los cuerpos anteriores, todos ellos con fórmulas a las que no suelen estar acostumbrados, los posibles errores y fallos vendrán también por el olvido o la falta de sistematización y orden en la realización de los cálculos. Por ello, se sugiere que realicen y consulten la tabla resumen de todas las fórmulas para el cálculo de volúmenes.

Soluciones

1. a) 33,51 m^3.

b) 268,085 dm^3.

c) 2 144,66 cm^3.

d) 17 157,28 mm^3.

Problemas sobre el volumen de la esfera

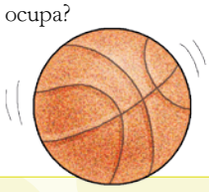
Resuelvo problemas

1. Si la Tierra fuera una esfera perfecta y sabiendo que su radio mide 6 371 km, ¿cuál sería su volumen?

2. Calcula el volumen de una bola esférica de helado, sabiendo que su diámetro mide 5 cm.

3. Andrés y Maribel han hecho una apuesta. Andrés dice que si se invierten las dimensiones de dos conos, los volúmenes cambian. Maribel dice que no, que el volumen sigue siendo el mismo. Explica quién tiene razón.

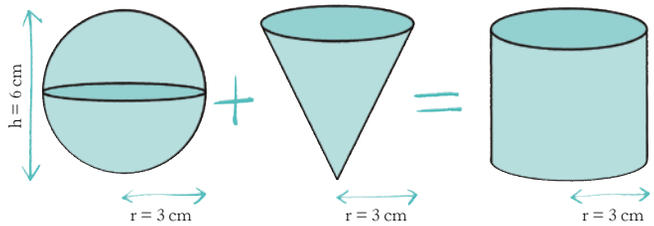
4. Una pelota de baloncesto tiene un radio de 15 cm. ¿Qué volumen ocupa?



Invento, creo y razono

5. Hemos visto que el volumen de una esfera son las dos terceras partes del volumen del cilindro que la contiene. También sabemos que el volumen de un cono es la tercera parte del volumen de un cilindro con la misma base y la misma altura que dicho cono.

   Comprobad que el volumen de una esfera y el volumen de un cono son iguales al total del volumen de un cilindro. Haced los cálculos con estos datos:



Anotaciones

Pág. 167 Sugerencias metodológicas

En esta última página de problemas seguimos el mismo plan que se ha ofrecido en las anteriores para la resolución de problemas sobre volúmenes.

Se recomienda siempre que usen la calculadora para la realización de los cálculos correspondientes.

Soluciones

1. El volumen sería de 1 082 657 777 102 km^3.

2. El volumen de la bola de helado sería 65,45 cm^3.

3. No es lo mismo. Se pueden tomar como ejemplo dos conos uno de 4 cm de radio y 2 cm de altura, y el otro, al contrario. Haciendo los cálculos de ambos volúmenes se podrá comprobar que dan el mismo resultado.

4. La pelota de baloncesto tiene un volumen de 14 130 cm^3.

5. 113,04 cm^3 + 56,52 cm^3 = 169,56 cm^3.

Anotaciones

Jerarquía de las operaciones

Cuando tenemos varias operaciones seguidas en una misma expresión matemática, sabemos que debemos seguir un orden para llegar a la solución correcta. Se trata de una forma de ir resolviendo las operaciones poco a poco por las partes que le van tocando. Recordamos cuál es ese orden y algunas aclaraciones.

1. **Paréntesis.** Realizamos en primer lugar las operaciones que haya entre paréntesis y corchetes.
   - Si hay varias operaciones dentro del paréntesis, resuélvelas en el mismo orden que lo harías si no hubiera paréntesis.
   - Si hay varios paréntesis, empieza por el de la izquierda.
   - Los corchetes son una forma de introducir una operación entre paréntesis junto con otras. En este caso se empieza por los paréntesis que estén dentro de los corchetes.
2. **Exponentes.** Calculamos las potencias.
3. **Multiplicaciones y divisiones.** Comienza siempre por la operación (producto o división) que esté a la izquierda.

   En $6 \times 2 : 3$ sería primero el producto: $12 : 3 = 4$

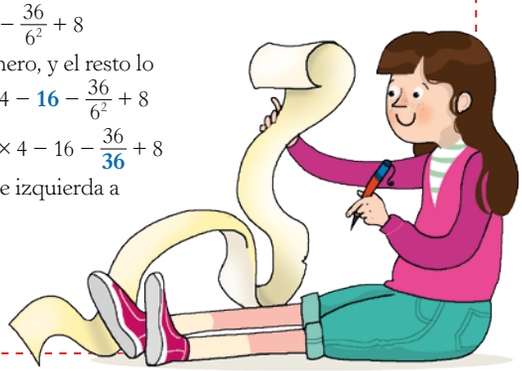
   En $6 : 2 \times 3$ sería primero la división: $3 \times 3 = 9$
4. **Adiciones y sustracciones.** Serían las últimas operaciones a realizar y las puedes hacer en el orden que quieras.

Uno de los principales fallos a la hora de resolver este tipo de operaciones, no está en la jerarquía, sino en escribir solo la parte que vamos operando, dejando el resto sin anotar, lo cual hace que se nos olvide alguna parte.

Para evitar este fallo, aquello que no vayas a calcular en ese momento, escríbelo exactamente igual. Imagina que es como si escribieras lo que vas leyendo, arrastrando, y cuando llegas a lo que toca calcular, lo resuelves y sigues escribiendo el resto exactamente igual.

Te dejamos un ejemplo: $8 : 2 \times 4 - (6 + 5 \times 2) - \frac{36}{6^2} + 8$

1. Según la jerarquía, el paréntesis sería lo primero, y el resto lo escribo tal como está, quedando así: $8 : 2 \times 4 - \mathbf{16} - \frac{36}{6^2} + 8$
2. Lo siguiente es la potencia, y queda así: $8 : 2 \times 4 - 16 - \frac{36}{\mathbf{36}} + 8$
3. Ahora tocan multiplicaciones y divisiones de izquierda a derecha: quedaría así: $\mathbf{4} \times 4 - 16 - \mathbf{1} + 8$
4. El producto queda así: $\mathbf{16} - 16 - 1 + 8$
5. Por último, las sumas y las restas. El resultado final sería **7.**



168

Pág. 168 Sugerencias metodológicas

Conocer y aplicar con eficacia la jerarquía de las operaciones es algo que al alumnado, por la forma de operar hasta el momento, les cuesta realizar. El problema no es tanto de comprensión, sino de ejecución. Al alumnado le resulta más cómodo o lógico ir cogiendo las operaciones y realizándolas, sin dejar reflejado durante el proceso aquellos elementos que no se operan hasta realizado el que jerárquicamente le toca. Esta costumbre les lleva a olvidar parte de lo no realizado y no indicado durante el camino. Por ello hemos dedicado una página completa a los tipos de jerarquía y un ejemplo concreto sobre el que ver paso a paso cómo deben realizarlo.

Otro de los problemas que podemos observar en el alumnado del método ABN es que directamente pongan la solución, tras realizar mentalmente las operaciones. Si bien esto estaría magnífico, nos encontramos con dos problemas que no aconsejan que se realice mentalmente.

- Por una parte porque si se equivocan no hay forma de comprobar y descubrir el error.
- Por otra parte, cuando el alumnado pasa a la ESO, el profesorado, como es lógico, necesita ver todo el proceso para comprobar que han comprendido lo que deben hacer. En este caso se han dado auténticos problemas ya que el alumnado suele tender a ahorrarse pasos y entran en conflicto con lo que el docente le ha pedido.

Respecto a la graduación de los ejercicios, se empieza pidiendo que indiquen el orden de ejecución de las operaciones, sin llegar a realizarlas. Posteriormente cada ejercicio contempla un nivel de dificultad acorde a lo establecido en la explicación.

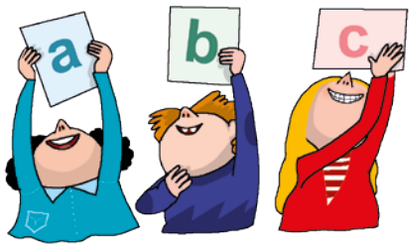
1 Hemos puesto una letra a las operaciones que aparecen en estas expresiones matemáticas. Pon solo las letras en el orden que debería realizarse.

a) $\underbrace{6 \times 8}_{a} : \underbrace{4}_{b} - \underbrace{5}_{c}$

b) $\underbrace{50 - 8}_{a} \times \underbrace{6 : 3}_{b\ \ c}$

c) $\underbrace{12 : 6}_{a} + \underbrace{(7 \times 3)}_{b\ \ c}$

d) $\underbrace{24 : (4 \times 3)}_{a\ \ b} - \underbrace{2}_{c}$



2 Según el orden que has indicado en el ejercicio anterior, resuelve cada una de las expresiones matemáticas.

3 Resuelve las siguientes expresiones matemáticas con y sin paréntesis.

a) $6 \times 3 : 9 + 9$ b) $6 \times 3 : (9 + 9)$ c) $24 : 4 \times 3 - 2$ d) $24 : (4 \times 3) - 2$

4 Resuelve las siguientes expresiones, en las que hemos añadido operaciones con fracciones.

a) $\left(\frac{3}{4} + \frac{4}{8}\right) - 2$

b) $\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + 1$

c) $\frac{8}{2} + 3 \times 2$

d) $3 - \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{3}\right)$

5 Resuelve estas expresiones matemáticas con paréntesis y números negativos.

a) $(-7 + 4) : 3$

b) $-4 \times (6 - 9)$

c) $(12 - 7) \times (-5)$

d) $(3 - 6) \times (8 - 10)$

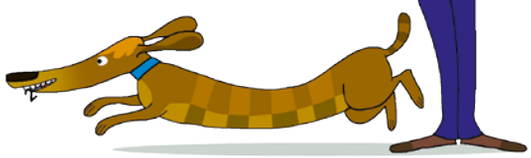
6 Resuelve las siguientes expresiones en las que hemos añadido operaciones con potencias.

a) $\frac{1}{2} + 3^2 : 3$

b) $(2^3 - 6) \times 5$

c) $(3^2 \times 2 - 4) : 3$

d) $(3^2 \times 2 - 4) : 7$



Anotaciones

Pág. 169 Soluciones

1. a) a, b, c b) b, c, a c) c, a, b d) b, a, c

2. a) 7 b) 23 c) 34 d) 0

3. a) 11 b) 1 c) 16 d) 0

4. a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{19}{12}$ c) 10 d) $\frac{7}{6}$

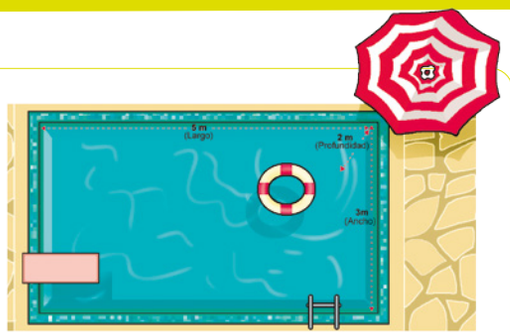
5. a) -1 b) 12 c) -25 d) 8

6. a) $\frac{7}{2}$ b) -10 c) $\frac{14}{3}$ d) 2

Anotaciones

TAREA COMPETENCIAL

Preparando el verano



Se acercan las fechas veraniegas y antes de que empiece a apretar el calor, María quiere preparar su nueva piscina.

Unos operarios han estado construyéndola durante el último mes y ya está terminada. Ayúdale a tomar las decisiones relativas a su uso y cuidado.

1 Lo primero que hará es llenarla. Teniendo en cuenta las dimensiones de la piscina, María necesita saber cuántos litros de agua necesitará para llenarla. Elige la opción correcta.

a) 30 L c) 3 000 L

b) 30 000 L d) 300 L

2 La piscina se llenará con 6 chorros, que salen de sus paredes. Cada chorro verterá 1 000 L de agua por hora. María quiere programar el llenado. Tiene pensado empezar a llenarla a las 8:00. Indica a qué hora debería programar el temporizador para que se apaguen los chorros.

a) 13:00 c) 14:00

b) 12:00 d) 11:00

3 Llenar la piscina no cuesta siempre lo mismo. María quiere ahorrarse tanto como pueda. Para ello, realiza los cálculos correspondientes y decide qué mes debería llenarla para gastar lo menos posible e indica cuánto dinero le costará.

Mes	Precio m^3 de agua
Abril	1,47 €
Mayo	1,49 €
Junio	1,55 €

4 Finalmente, una vez que la piscina se llene, deberá realizar las correspondientes labores de mantenimiento del agua. Cada día deberá echar dos vasitos de cloro y uno de antialgas. Indica cuántos días le durará cada producto.

170

Pág. 170 Sugerencias metodológicas

Valen aquí las mismas orientaciones que se han señalado para las Tareas competenciales anteriores.

Soluciones

1. Opción b).

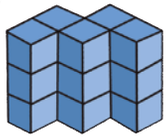
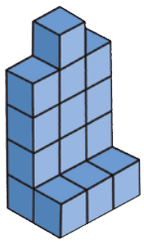
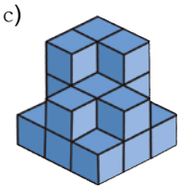
2. Opción a).

3. Abril. 44,1 €.

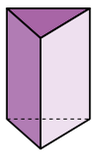
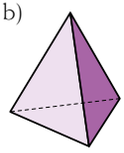
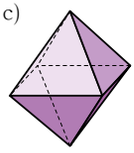
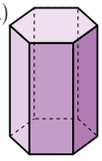
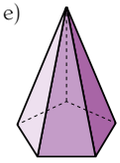
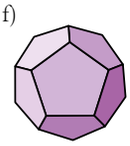
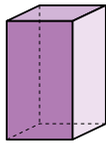
4. 25 días de cloro y 50 de antialgas.

REPASO

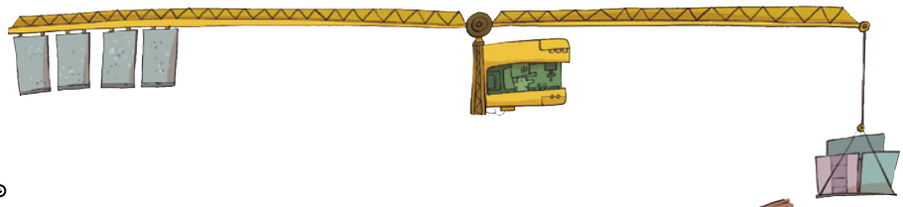
1 Si el lado del cubo que forma estas figuras mide 2 cm, ¿cuál es el volumen de cada una de ellas?

a)  b)  c) 

2 Identifica y escribe los nombres de los siguientes poliedros.

a)  b)  c)  d)  e)  f)  g) 

3 En una grúa de construcción hay 4 contrapesos con forma de prisma de base rectangular cuyas medidas son 2 m de alto, 1 m de largo y 50 cm de ancho. ¿Qué volumen ocupa el contrapeso?



4 ¿Qué volumen tendrá una pirámide de base cuadrangular cuyo lado mide 2,35 m, y su altura, 3 m?

5 El tambor de una lavadora tiene forma de cilindro. Sus dimensiones son 338 mm de diámetro y 455 mm de largo. ¿Cuál es el volumen que ocupa dentro de la lavadora?

6 Calcula las siguientes expresiones matemáticas.

a) $6 \times 5 + 9 : 3$ c) $(53 - 4) : (-7)$

b) $\frac{20}{5} : 2 \times 4$ d) $\left(\frac{2}{4} + \frac{1}{2}\right) \times 4$

Anotaciones

Pág. 171 Sugerencias metodológicas

Se ofrece un repaso general de los contenidos de la unidad que no requiere explicaciones adicionales.

Soluciones

1. a) 120 cm^3. b) 128 cm^3. c) 144 cm^3.

2. a) Prisma triangular.
b) Tetraedro.
c) Octaedro.
d) Prisma hexagonal.
e) Pirámide pentagonal.
f) Dodecaedro.
g) Prisma cuadrangular.

3. Los contrapesos ocupan un volumen de 4 m^3.

4. La pirámide tiene un volumen de 5,522 5 m^3.

5. El volumen que ocupa el tambor es de 40 805 100 mm^3.

6. a) 10 b) 8 c) −7 d) 4

11 ESTADÍSTICAS, GRÁFICOS Y HOJAS DE CÁLCULO

Presentación de la unidad

Esta unidad se dedica por completo a la Estadística, y desde un enfoque muy práctico: el aprendizaje del funcionamiento de una hoja de cálculo, con lo que no solo le daremos a los alumnos, como decía el viejo proverbio, un pez para saciar el hambre, sino también un instrumento muy efectivo de pesca para que pueda tener los peces que necesite. Las tres primeras páginas se dedican al repaso de las nociones estadísticas que han estudiado en cursos anteriores: rango, frecuencia, moda, mediana y media aritmética. Las siete páginas siguientes son temáticas: el uso de la hoja de cálculo y la introducción de datos y la obtención de resultados: ordenación de variables e introducción de las mismas, cálculo del rango y la moda, frecuencias absolutas, relativas y porcentuales, obtención de la media y la mediana, obtención de gráficos para primeras comparaciones.

Sugerencias metodológicas

También incluimos la calculadora, aunque en este caso el tratamiento que se hace es más ordinario y facilita los cálculos, pero nada más. No obstante, significa también un acercamiento, aunque menor, al pensamiento conceptual. Lo que sí es pensamiento conceptual y de alto nivel es comprender y manejar una hoja de cálculo.

- Análisis del tipo de datos para responder a la investigación planteada.
- Recogida, registro y organización de datos procedentes de diferentes experimentos clasificándolos en categorías y construyendo tablas de recuento y de frecuencias absolutas y relativas.
- Interpretación y cálculo, en contextos cercanos, de medidas de centralización.
- Comparación gráfica de dos conjuntos de datos para extraer información.
- Uso de la calculadora y otros recursos digitales, como la hoja de cálculo, para organizar la información estadística.

Resolución de problemas

En esta unidad los problemas que se trabajan tienen que ver, como no puede ser de otra manera, con los conceptos estadísticos. Así, hay problemas sobre las variables, sus definiciones y la categorización de las mismas, el rango, la mediana y la media aritmética y problemas que permitan discriminar entre una y otra, la generación de gráficos a partir de tablas de datos, el uso de tablas para la resolución de problemas, problemas de recuento sistemático, situación de aprendizaje que engloba los conceptos trabajados…

Educación en valores

El tema de la estadística y probabilidad está muy unido al estudio de nuestras costumbres y gustos con el objetivo de obtener información que permita conocer no solo nuestras preferencias, sino también nuestras intenciones, hasta tal punto que ha sido necesaria una ley de protección de datos.

En este contexto, proponemos trabajar el valor de la intimidad y privacidad, debido a que es muy fácil que los jóvenes proporcionen datos e imágenes propias sin plantearse las consecuencias que ello puede acarrear.

Para ilustrar la temática y motivar el debate, proponemos el visionado de uno o varios de estos vídeos que hemos seleccionado:

- Privacidad y ciberbullying.
- Privacidad en redes sociales.

Recursos y materiales recomendados

Recursos digitales:

Para que el alumnado no tenga ningún problema, del sistema operativo que usa (Windows, Linux, o Mac) o incluso si dispone de programas de ofimática, se ha optado por la hoja de cálculo disponible en los programas de Google, bien dentro de Classroom o directamente con una cuenta de Gmail.

- ¿Cuánto sabes de estadística? (Genially).
- Media, mediana y moda (Genially).
- Frecuencias absolutas y relativas (Genially).

Pensamiento computacional

El presente tema tiene un marcado acento digital. Tras una explicación y repaso de contenidos nuevos y otros ya conocidos, proponemos su solución, además de en el cuaderno, a través de la calculadora (básica) y de las hojas de cálculo, que hasta la fecha probablemente ningún libro de texto de Primaria se haya aventurado a realizar.

Para presentar la estadística a través de hojas de cálculo hemos de usar fórmulas cuyo nombre resultará extraño al alumnado. Se deberá tener especial cuidado en que las escriban bien, sin dejar espacios en blanco, omitir letras o sustituirlas por otras, ya que en esos casos la orden no se ejecutará.

Para facilitar al alumnado el aprendizaje se han preparado una serie de vídeos en los que se explica y se realizan las propuestas que hay en cada página. Recomendamos que dichos vídeos sean vistos con atención, ya que si ben componen la parte teórica de la unidad introducen a la vez los ejercicios a realizar.

Cálculo mental:

Repaso de cálculo de productos, porcentajes y sumas y restas con enteros.

- Porcentajes:
  - Cálculo de porcentajes sencillos, con centenas completas: 4 % de 300, 21 % de 400, etc.
  - Cálculo de porcentajes de centenas con decenas completas: 15 % de 420.
  - Fomentar el uso de las siguientes estrategias: número de centenas. 8 % de 300 = 3 8 = 24; 9 % de 120 = 9 × 1,2 = 10,8
- Números enteros:
  - Sumas y restas sencillas de números enteros.
- Producto:
  - Producto de un decimal por décimas. 0,6 × 0,7 - 0,08 × 0,9 - …
  - Producto de un dígito por un dígito con decimales en ambos factores: 4,3 × 0,8 - 0,27 × 0,6 - …
  - Fomentar el uso de las siguientes estrategias: al multiplicar un orden de unidades por décimas saltamos al orden inmediatamente inferior. Ej. $d \times d = c$ - $c \times d = m$

Esquema

Estadísticas, gráficos y hojas de cálculo

Estadística. Pensamiento conceptual

- Conceptos básicos: rango, frecuencia, moda, mediana y media aritmética.
- Cálculos estadísticos con la calculadora.
- Cálculos estadísticos con Excel.
- Comparación de dos conjuntos de datos en función de su rango, su representación gráfica, su mediana y su media aritmética.

Problemas

- Problemas de estadística.
- Problemas de recuento sistemático.
- Problemas con tablas.

Anotaciones

ESTADÍSTICA, GRÁFICOS Y HOJAS DE CÁLCULO

Repasamos algunos conceptos básicos de estadística: la variable, el rango y la moda

Variable: es cualquier conjunto de sucesos que presenta distintos valores que se pueden medir y estudiar.

Por ejemplo, las calificaciones de un curso, los libros leídos en una clase, los deportes que se practican… No son variables aquellos que no se pueden medir y estudiar, como el cariño, las ganas de ganar una partida, la duración de un día…

Rango: es la diferencia que existe entre el valor más alto y el más bajo de una variable.

Por ejemplo, en la variable «Edades de mis familiares», los datos de la edad de mi familia son los de esta tabla:

EDADES DE MIS FAMILIARES	
Alejandro	2
Amalia	8
Yo	12
Darío	14
Mamá	28
Papá	28
Abuela Lola	29
Abuela Carmen	31
Abuelo Álex	65
Bisabuela María	98

La edad de mi bisabuela María es el dato más alto (98 años), y la de mi hermano Alejandro es la más baja (2 años). El rango es su diferencia: $98 - 2 = 96$ años.

Moda: es el valor de la variable que más se repite.

Por ejemplo, en la variable «Edades de mis familiares», la moda es 28, con la frecuencia más alta (2 resultados).

1 Se ha preguntado sobre tres variables en la clase de 6.º y estas han sido las respuestas. Indica el rango y la moda de los datos en cada una de ellas.

LIBROS LEÍDOS	
Elena	12
José Carlos	11
Paula	12
Ainhoa	12
Juanma	12
Carlos	11
Miguel	10
Víctor	10
Rocío	14
Andrea	13

METROS LANZAMIENTO DISCO
7
10
6
14
8
4
12
10
8
6

DINERO AHORRADO
20
5
18
40
1
1
0
21
15
38

Pág. 172 Sugerencias metodológicas

Los conceptos estadísticos que presentamos no generan dificultades de comprensión. Los posibles errores pueden deberse a confundir un término con otro por falta de uso en su lenguaje ordinario. Esto no sucede con el término «moda», que conocen y asocian perfectamente como un concepto estadístico.

Para facilitar el aprendizaje de cada una de estas palabras, se ofrecen las siguientes asociaciones:

- El rango, con la diferencia de puntuación (o goles marcados) de los equipos en las diferentes clasificaciones deportivas.
- La frecuencia, con la repetición de sucesos ordinarios como, por ejemplo, con las veces que vamos al colegio a la semana, las veces que comemos al día, las veces que pasan los autobuses, etc.
- La mediana, con el concepto de estar en el medio de los más altos y más bajos, los más rápidos y los más lentos, etc.

Soluciones

1. a) El rango es $14 - 10 = 4$ La moda es 12.
b) El rango es $14 - 4 = 10$ la moda es 6, 8 y 10.
c) El rango es $40 - 0 = 40$ La moda es 1.

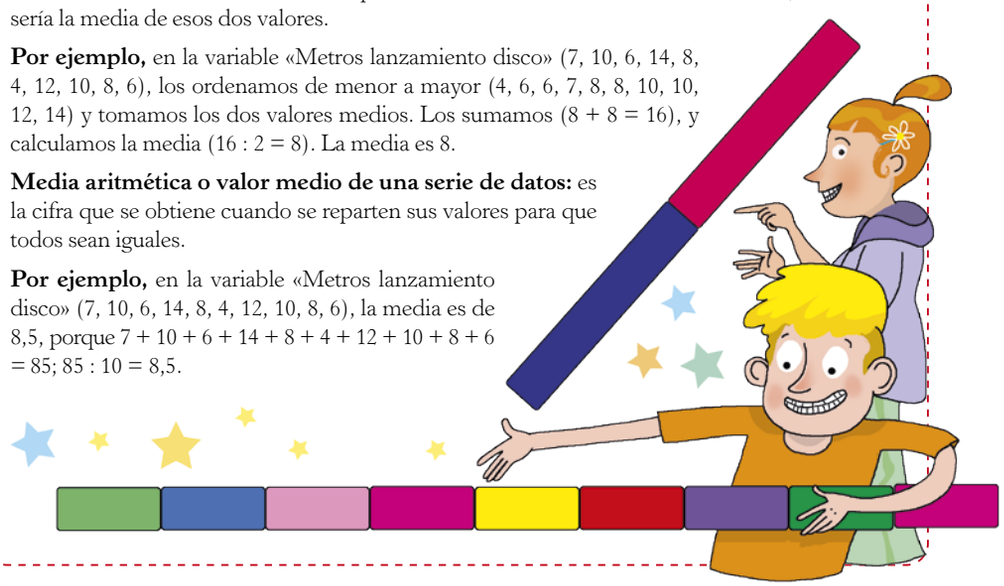
Repasamos conceptos básicos. La mediana y la media

Mediana: es el valor que está en el centro de la variable. Es el número intermedio de un grupo de números ordenados. La mitad de los números son superiores a la mediana y la otra mitad de los números tienen valores menores que la mediana. Si hubiera dos valores medios, la mediana sería la media de esos dos valores.

Por ejemplo, en la variable «Metros lanzamiento disco» (7, 10, 6, 14, 8, 4, 12, 10, 8, 6), los ordenamos de menor a mayor (4, 6, 6, 7, 8, 8, 10, 10, 12, 14) y tomamos los dos valores medios. Los sumamos (8 + 8 = 16), y calculamos la media (16 : 2 = 8). La media es 8.

Media aritmética o valor medio de una serie de datos: es la cifra que se obtiene cuando se reparten sus valores para que todos sean iguales.

Por ejemplo, en la variable «Metros lanzamiento disco» (7, 10, 6, 14, 8, 4, 12, 10, 8, 6), la media es de 8,5, porque 7 + 10 + 6 + 14 + 8 + 4 + 12 + 10 + 8 + 6 = 85; 85 : 10 = 8,5.



1 Analiza los datos de estas tablas con información sobre el alumnado de 6.º y realiza en tu cuaderno otras dos tablas, una para cada una de ellas, con los datos que se piden a continuación.

KG COMIDA MASCOTA EN TIENDA	
Pájaros	16
Peces	12
Perros	24
Gatos	12
Hámsters	8

PERSONAS QUE VAN A LA FIESTA	
Halloween	22
Navidad	38
Carnaval	18
Semana Santa	22
Fin de curso	42

- Nombre de la variable.
- Rango.
- Moda.
- Mediana.
- Media aritmética.

Anotaciones

Pág. 173 Sugerencias metodológicas

En relación con el concepto de media aritmética, la única dificultad que puede aparecer es que los niños y las niñas no sumen los casos que tengan datos repetidos, reflejándolos solo en una ocasión y no en tantas como aparezcan. Para solventar este problema, debemos recordarles que para el cálculo de la media aritmética debemos tener tantos sumandos como el número por el cual vayamos a dividir la suma.

Soluciones

1.

TABLA DE DATOS
Nombre de la variable: kg comida
Rango: 24 − 8 = 16
Moda: 12
Mediana: 12
Media aritmética: 14,4

TABLA DE DATOS
Nombre de la variable: n.º personas
Rango: 42 − 18 = 24
Moda: 22
Mediana: 22
Media aritmética: 28,4

Anotaciones

Cálculo de la mediana y de la media. Parecidos y diferencias

¿Es lo mismo la media que la mediana? Por una parte, tienen semejanzas, ya que ambas nos indican el dato sobre el cual tienden a agruparse el resto de los datos. Pero si son los mismos, ¿por qué se repiten?

Para empezar, piensa, por ejemplo, en el caso de que en tu familia hayáis comido dos pollos esta semana y en la familia de un amigo tuyo no han comido pollo. Si se hace la media entre las dos familias, esta indicará que cada una de las dos familias se ha comido un pollo esta semana.

Para entender mejor ambos términos, observa estos ejemplos.

Un grupo de 7 amigos han obtenido estas puntuaciones jugando: 2, 10, 3, 7, 6, 10, 3.

La media sería: 2 + 10 + 3 + 7 + 6 + 10 + 3 = 41; 41 : 7 = 5,9.

La mediana: (una vez ordenados los datos) 2, 3, 3, 6, 7, 10, 10 = es el 6.

Observa que los datos, tanto altos como bajos, están repartidos a ambos lados de la mediana y tanto la mediana como la media son similares.

En la siguiente partida, los puntos obtenidos fueron 8, 5, 4, 50, 4, 8, 1.

La media sería: 8 + 5 + 4 + 50 + 4 + 8 + 1 = 80; 80 : 7 = 11,4, a pesar de que la mayoría no superó los 10 puntos.

La mediana: (una vez ordenados los datos) 1, 4, 4, 5, 8, 8, 50 = 5.

Ahora los valores de la media y la mediana son muy diferentes. Si observas los datos inferiores de la mediana (1, 4, 4) son muy bajos respecto a los datos superiores a la mediana (8, 8, 50), afectando los datos bajos a la media.

Por tanto, ten en cuenta que, si los datos que se estudian son mayoritariamente uniformes, la media nos dará una idea central con total seguridad. Sin embargo, si el conjunto de números tiene valores separados más altos o bajos que el resto de los valores, esto influirá en la media. Por tanto, debes tener en cuenta la mediana como valor más fiable.

A veces la media y la mediana pueden coincidir con la moda (elemento que más se repite). Un ejemplo es el siguiente, con estos datos: 4, 4, 5, 4, 3.

Media: 3 + 4 + 4 + 4 + 5 = 20 : 5 = 4.

Mediana: 3, 4, 4, 4, 5 = 4.

Moda: el 4 que es el que más se repite.

1 Indica en los siguientes datos cual es la media y la mediana y explica cuál es el valor más fiable en cada caso y por qué.

a) 21, 2, 8, 3

b) 12, 11, 9, 8, 10

c) 20, 22, 18, 16

d) 5, 19, 72, 18, 21

174

Pág. 174 Sugerencias metodológicas

Las diferencias entre media y mediana son sencillas de establecer si se han comprendido bien los conceptos. No ayuda el hecho de que, en ocasiones, ambas medidas tengan el mismo valor. Pero hay cuestiones en las que se debe insistir: media aritmética. La más importante y la que más se usa. Es el valor medio de la variable, y se obtiene sumando todos los valores y dividiendo la suma de los mismos por el número de valores (o casos) que se han sumado.

Mediana. No es un valor, sino que es la posición que ocupa el valor que deja por encima o por debajo del mismo idéntico número de casos. Para hallar la mediana lo que hay que hacer es:

- Ordenar todos los valores de todos los casos en orden creciente o decreciente.
- Buscar el valor del caso que ocupa la posición central dentro de la variable.

Por ejemplo, en el caso de los valores 5, 7, 8, 11, 15, la mediana es 8, puesto que deja dos valores a la izquierda y dos valores a la derecha. Sin embargo, la media es 9,2.

Si hubiera siete casos, la mediana sería el valor que ocupara el lugar 4, pues dejaría tres casos a cada lado del mismo. Si hubiera trece casos, la mediana sería el valor que ocupara el lugar 7, pues dejaría seis casos a cada lado del mismo. Sin embargo, si el número de casos fuera par, la mediana sería el valor medio de los dos casos centrales: 3, 5, 9, 11, 34, 40. La mediana de esta variable sería 10, que deja tres casos a un lado y otros tres casos al otro lado. La media sin embargo sería 17.

Actividades b) y c). El docente debe preguntar a los alumnos qué tienen en común los datos de estas dos actividades, en los que coinciden de su media aritmética y su mediana, y en qué se diferencian de las actividades a) y d), cuyas medias y medianas son diferentes. Una vez que establezcan esa diferencia, que comprueben su funcionamiento con más series de datos.

Soluciones

1. a) Media = 8,5. Mediana = 5,5. La mediana por la dispersión tan extrema de los datos.

b) Media = 10. Mediana = 10. Ambos valores son iguales.

c) Media = 19. Mediana = 19. Ambos valores son iguales

d) Media = 27. Mediana = 19. La mediana, por la dispersión tan extrema de los datos.

Pensamiento computacional. Cálculo del rango, la mediana y la media con la calculadora

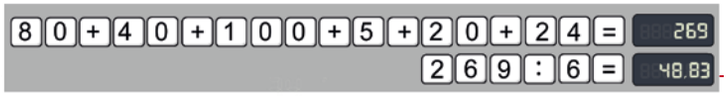
Ya conoces y sabes calcular estos términos estadísticos. Ahora vamos a hacerlo con una calculadora sencilla. Para ello partimos de los siguientes datos, correspondientes al número de refrescos consumidos en una fiesta.

NARANJA	LIMÓN	COLA	TÓNICA	LIMA	ENERGÉTICO
80	40	100	5	20	24

Rango: se trata de una operación en la que solo debemos teclear el valor mayor (100), pulsar la tecla «restar», teclear el valor más bajo (5) y pulsar igual.

Mediana: una vez ordenados nuestros datos (5, 20, 24, 40, 80, 100), si la cantidad es impar, el valor central es la mediana; si es par, sólo tendremos que sumar con la calculadora los dos valores centrales (24 y 40) y dividir entre dos.

Media: debemos introducir todos los datos sumando uno por uno, incluso si está repetido. Una vez introducidos todos, damos a la tecla «igual» y dividimos por el total de datos que hemos introducido, que en nuestro ejemplo son 6.



1 Usando la calculadora, averigua el rango, media y la mediana de los datos de las siguientes variables:

a) Días que los miembros de mi familia han hecho deporte en los últimos cuatro meses.

PAPÁ	MAMÁ	HERMANA	HERMANO	YO
140	84	84	66	100

b) Número de goles metidos por los equipos del colegio:

5.º A	5.º B	5.º C	6.º A	6.º B	6.º C
15	18	28	16	19	24

2 Haz una encuesta entre los compañeros y compañeras de clase. Puedes usar la variable contable que desees o algunas de estas: fruta consumida, tipo de música que más escuchas, plato de comida preferido, número de veces que se practica deporte… Una vez tengas recogidos los datos, averigua el rango, la media y la mediana.

Anotaciones

Pág. 175 Sugerencias metodológicas

Iniciamos el cálculo estadístico con el uso de la calculadora. Recomendamos que sea una calculadora básica y en el caso de que alguna parte del alumnado disponga de calculadoras científicas, solo usen las operaciones básicas.

Se trata de una primera aproximación, por lo que aún no están preparados para el uso de calculadoras científicas, y con ella lo único que vamos a hacer es ahorrar tiempo en el cálculo. Llegados a este punto indicamos que lo que realmente importa en estos contenidos no es el cálculo —el cual ya debe estar asentado—, sino el concepto que hay detrás de cada uno de los términos estadísticos, qué significan y cómo se hallan.

Soluciones

1. a) Rango: 74. Media: 94,8. Mediana: 84.
b) Rango: 13. Media: 20. Mediana: 18,5.

2. Respuesta abierta.

Anotaciones

Pág. 176 Sugerencias metodológicas

En el vídeo de presentación se explica al alumnado los siguientes puntos:

- Cómo entrar en la hoja de cálculo Google drive.
- Explicación general de la pantalla.
- Cómo poner nombre al archivo.
- Qué son las filas, columnas y celdillas en la hoja de cálculo.
- Las opciones más destacadas del menú e iconos de la barra de herramientas.

En el segundo vídeo se realiza una actividad sencilla de creación de la tabla de datos que hay en esta página del libro de texto, así como un uso fácil de la herramienta «filtro». Para que las explicaciones, tanto del libro como del vídeo, se correspondan con lo que el alumnado hace, se debe tener en cuenta que hagan clic en las celdillas que se indican y no en otras.

Una vez realizados los ejercicios propuestos pueden hacer una copia, tal y como se explica en el vídeo, de la hoja 1, al objeto de poder hacer cuantas modificaciones deseen, así como que experimenten con otras opciones relacionadas con el formato (tipo de bordes, cambio de fuente, colores de letras y de fondos…) y con el filtraje de datos.

Como propuesta de **ampliación** se sugiere añadir, en la copia realizada, una columna más con dato de las notas de otra asignatura, con los cambios que correspondan.

Soluciones

Las soluciones de todas las actividades son digitales. Se indican unas orientaciones de lo que deben mostrar las respuestas una vez hechas.

1. Al seleccionar en el filtro el color asignado a los niños, estos se agrupan al principio y las de la niñas, al final.

2. Pasará lo mismo, pero a la inversa, los datos de las niñas se agruparán al principio y los niños al final.

3.
- Al ordenar de la A a la Z, se ordena alfabéticamente el nombre de todos los alumnos, empezando por Ana y acabando por Toñi. Junto con los nombres también se ordenan los datos numéricos de las notas.
- Al ordenar de la Z a la A, se ordena alfabéticamente en orden inverso el nombre de todos los alumnos, empezando por Toñi y acabando por Ana. Junto con los nombres también se ordenan los datos numéricos de las notas.
- Al filtrar por valores y seleccionar los suspensos muestra solo dos datos, el de Eva y Leo, que tienen un 4.
- Al filtrar por valores y seleccionar los aprobados muestra nueve datos, todos los de los aprobados.

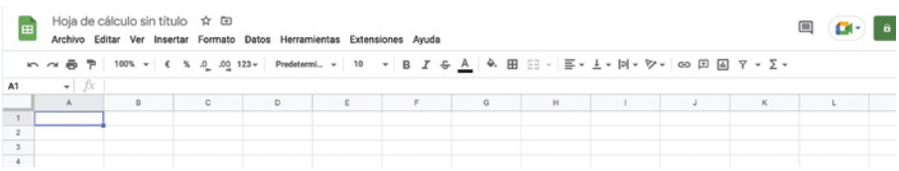
Estadísticas con hojas de cálculo. Introducción de variables. Ordenación dentro de cada variable

Vamos a aprender a utilizar una hoja de cálculo con la que averiguar términos estadísticos. Para ello, usaremos la hoja de cálculo de Google. Puedes usar cualquier otra hoja de cálculo, ya que en todas ellas el procedimiento es similar.

Vamos a introducir los datos de las notas de varios compañeros de clase y posteriormente vamos a seleccionar los datos según unas condiciones u otras.

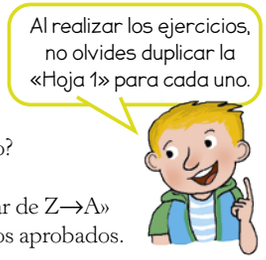
NOMBRE	Toñi	Ana	Luis	Luz	Isa	Eva	Iván	José	Mar	Leo	Paz
NOTA	7	10	5	6	10	4	10	9	9	4	6

1. Accede a través de tu cuenta de Classroom.
2. Abre un nuevo documento en blanco. Te aparecerá esta imagen:



3. Pon un nombre a la variable en «Hoja de cálculo sin título». Puede ser **Notas.**
4. En la **columna A,** celda **A1,** escribe **Nombre,** y en la **columna B,** celda **B1,** escribe **Nota.**
5. En la columna A introduce los nombres de los alumnos y alumnas y en la columna B, las notas de cada uno. Además, colorea las notas de los niños o de las niñas. Para ello, haz clic en la nota y, a continuación, ve al icono «Color» y elige el que te guste (elige siempre el mismo color).
6. Ahora vamos a inmovilizar la fila 1 para que al ordenar no se mueva. Haz clic en el número 1 de la fila y, en el menú de «Texto», busca «Ver» y selecciona «Inmovilizar 1 fila».
7. Haz clic en el cabecero de la columna B para seleccionarla y luego en el icono «Filtro» ( ). Aparecerá el icono de filtrar a la derecha del título de la columna.
8. Vamos a realizar varios filtros (selecciones). Para ello, creamos una nueva tabla igual sobre la que trabajar. Simplemente, abajo, donde dice «Hoja 1», haz clic y elije duplicar.

1. Haz clic en el icono junto a «Notas» de la fila B, dentro de «Filtros por color» y elije el que has puesto a los niños o a las niñas. ¿Qué ha ocurrido?
2. En una nueva hoja duplicada, selecciona el otro color. ¿Qué ha ocurrido?
3. Duplica una nueva hoja y en el filtro elije «Ordenar de A→Z», «Ordenar de Z→A» y, dentro de «Filtrar por valores», elije aquellos que estén suspensos o los aprobados.



176

Pensamiento computacional. Cálculo del rango y de la moda

Abre un nuevo documento e introduce los datos para la variable «Número de horas semanales conectados a Internet de mis compañeros y compañeras». En la celda A1 pon **NOMBRE** y en la celda B1 pon **HORAS**. Completa ambas columnas con estos datos:

NOMBRE	HORAS
Elena	12
José Carlos	11
Paula	12
Ainhoa	12
Juanma	12
Carlos	11

NOMBRE	HORAS
Miguel	10
Víctor	10
Rocío	14
Andrea	13
Javier	18
Darío	14

NOMBRE	HORAS
Álex	20
Aitor	15
Álvaro	18
Alejandro	20
Antonio	11
Miriam	12

A continuación, vamos a calcular el rango y la moda.

Para el **rango** vamos a pedir a la hoja de cálculo que nos busque el valor más alto y el más bajo. Si hubiera decenas, centenas… de datos, hacer este proceso sería muy lento sin esta ayuda. Para ello:

1. Haz clic en la casilla D2 y escribe **Valor máximo,** y en la D3, **Valor mínimo.**
2. En E2 escribe **=MAX** y, sin cerrar el paréntesis, haz clic en la columna de los datos arrastrando desde B2 hasta B19 y pulsa la tecla INTRO. Con esta acción se cierra el paréntesis y nos muestra el valor máximo. En nuestro ejemplo el 20.
3. En E3 escribe **=MIN** y, al igual que antes, haz clic en B2 y arrastra hasta B19. Pulsa INTRO y ya tienes el valor mínimo, que es el 10.
4. Para calcular el rango, sería una simple resta, pero si cambiamos el dato máximo o el mínimo, el rango ya no coincidiría. Por ello lo hacemos así:

   En D5 escribe **Rango** y en E5 escribe **=(E2-E3),** que son los valores de las casillas del valor máximo y mínimo. Al hacer clic, te devolverá que el rango es 10 y si cambias los valores máximos o mínimos de la tabla, se adapta a los nuevos datos.

Para la **moda:**

1. Haz clic en la casilla D6 y escribe **Moda.**
2. En la celda E6 escribe **=MODE** y, al igual que para el rango, haz clic desde B2 hasta B19 y pulsa la tecla INTRO. Con esta acción se cierra el paréntesis y nos muestra la moda, que en nuestro ejemplo es el 12, que se repite 5 veces.

1. Sobre el fichero que has creado, haz las siguientes modificaciones y explica qué ocurre con los valores del rango y la moda.

   a) Cambia el valor de Andrea de un 13 a un 26 y pulsa INTRO.

   b) Cambia los valores de Miguel, Víctor y Darío a 11 y pulsa INTRO.

Anotaciones

Pág. 177 Sugerencias metodológicas

En el tercer vídeo se muestran los pasos para crear una nueva tabla con los datos que aparecen en esta página del libro de texto. Se debe tener cuidado, pues no se trata de hacer tres tablas, sino una sola con los datos que aparecen en esta tabla.

Una vez confeccionada la tabla el procedimiento es muy sencillo. La única dificultad, como ya señalamos, es tener especial cuidado en la escritura de las funciones, sin dejar espacios en blanco, omitir letras o sustituirlas por otras, ya que en esos casos la orden no se ejecutará.

Además de lo indicado en el texto, a lo que el vídeo hace referencia, también el docente puede recalcar las funciones de la hoja de cálculo, que se pueden encontrar tanto en el menú Datos como en el icono - Σ - de la barra de herramientas.

Soluciones

Las soluciones de todas las actividades son digitales. Se indican unas orientaciones de lo que deben mostrar las respuestas una vez hechas.

1. a) El rango cambia a 16 y la moda permanece igual.

b) El rango cambia a 9 y la moda cambia a 11.

Anotaciones

Estadísticas con hojas de cálculo. Las frecuencias I

Con ayuda de nuestra hoja de cálculo y de los datos ya introducidos para la variable «Número de horas semanales conectados a Internet de mis compañeros y compañeras», vamos a averiguar las frecuencias absoluta, relativa y porcentual.

En primer lugar, preparamos la tabla donde van a aparecer nuestros datos. Para ello creamos una tabla de 4 columnas.

1. Haz clic en la celda G1 y arrastra el ratón hasta J1. Queda resaltada y busca en el menú el icono , que unirá estas 4 celdas en una sola. En ella escribe **Distribución de frecuencias.**

2. Escribe también **HORAS** en la celda G2, **Frecuencia absoluta** en H2, **Frecuencia relativa** en I2 y **Frecuencia porcentual** en J2.

G	H	I	J
DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS			
HORAS	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA	FRECUENCIA PORCENTUAL

La frecuencia absoluta es el número de veces que se repite un dato. Para conocerla, procedemos de la siguiente forma:

3. Para calcular el rango ya averiguamos que los datos van desde el 10 al 20. Escribe el 10 en G3 y así sucesivamente hasta llegar al G13 con el 20.

4. En H3 escribe la función **=COUNTIF(** y arrastra el ratón desde B2 hasta B19 y, antes de pulsar INTRO, escribe «;» y haz clic sobre la casilla G3, y ya si puedes pulsar INTRO. El resultado final debe ser **=COUNTIF(B2:B19;G3).**

   ¿Qué hemos hecho? Le hemos indicado que cuente **(=COUNTIF)** en todos los datos **(B2:B19)** el número de veces que se repite el número 10 (que está en la casilla **G3).**

G	H	I	J
DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS			
HORAS	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA	FRECUENCIA PORCENTUAL
10	=COUNTIF(B2:B19;G3)		

5. Para no tener que repetir todo el proceso en cada una de las siguientes celdas, incluye el signo $ delante de la letra de la columna y del número de la fila en **=COUNTIF(B2:B19;G3),** de tal forma que quedaría así: **=COUNTIF($B$2: $B$19;G3).**

6. A continuación, haz clic fuera de la casilla H3 y vuelve a clicar en ella. Arrastra el cuadrito azul de la esquina inferior derecha hasta la fila 13. Ya están las frecuencias absolutas.

G	H	I	J
DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS			
HORAS	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA	FRECUENCIA PORCENTUAL
10	=CONTAR.SI($B$2:$B$19;G3)		
11	CONTAR.SI(intervalo; criterio)		
12			
13			
14	2		
15	1		
16	0		
17	0		
18	2		
19	0		
20	2		
TOTAL=	18		

Págs. 178 y 179 Sugerencias metodológicas

Profundizamos un poco más en el concepto de frecuencia con las frecuencias absolutas, acumuladas y relativas. De las tres, la única que puede suponer alguna dificultad es la frecuencia relativa, por lo que la debemos presentar como una fracción en la cual el numerador es el número de veces que se repite un caso concreto, y el denominador, el total de casos, forma que entenderán mejor por los conocimientos previos que ya tienen sobre fracciones.

El desarrollo de las propuestas para la realización de las frecuencias es en sí un ejercicio. Conforme el alumnado vaya realizando los diferentes pasos deberá ir logrando lo que el docente tiene disponible en los ficheros resueltos indicados en el código QR y que además mostramos aquí.

La construcción de la tabla de frecuencias conlleva una serie de acciones de introducción de fórmulas con las que, como ya hemos indicado, hay que tener especial atención en su escritura, y unos procedimientos que nos harán acortar el tiempo de realización de la tabla. Por eso recomendamos encarecidamente al docente que muestre el vídeo completo y que cuando vayan a realizarlo en su hoja de cálculo, hagan las pausas del vídeo necesarias para captar los detalles. Además, si lo ve necesario, puede desglosar en pequeños pasos el avance de esta parte de la construcción de la tabla de frecuencias

Estadísticas con hojas de cálculo. Las frecuencias II

La **frecuencia relativa** es el número de veces que se repite un dato respecto del total de datos. Se averigua en la hoja de cálculo dividiendo cada una de las frecuencias absolutas por el total de registros, que en nuestro caso es 18.

Si los datos son muchos, en lugar de contar podemos incluir al final de la columna H de la frecuencia absoluta la función **=SUM(** y arrastrar desde la primera celda de la columna hasta la última para a continuación, pulsar **INTRO.** Esto dará como resultado los 18 casos que tiene nuestra variable.

1. Para empezar, sitúate en la primera celda **I3** de la columna de frecuencia relativa y escribe **=H3/18** seleccionamos la celda, e igual que antes, haz clic en el cuadrito azul y arrastra hasta el final de la columna. Ya tienes las frecuencias relativas.

2. Normalmente, el programa ofrece el resultado con muchos decimales. Al objeto de reducir a sólo dos decimales, haz clic en el icono del menú (.0←).

Tal como nos da el dato

G	H	I	J
DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS			
HORAS	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA	FRECUENCIA PORCENTUAL
10	2	0,111111	

Tras reducir los decimales hasta solo 2

G	H	I	J
DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS			
HORAS	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA	FRECUENCIA PORCENTUAL
10	2	0,11	

3. Al final de la frecuencia absoluta, también puedes incluir el total. Para ello copia la casilla **H14** y pégala en la **I14.** Dará como resultado 1.

Para la **frecuencia porcentual** hay que seleccionar los datos de la columna de las frecuencias relativas y hacer clic en el icono % del menú. Y si quieres, puedes copiarla en una columna al lado y realizar los cambios ahí.

Ten en cuenta que, al igual que con los decimales de las frecuencias relativas, en las porcentuales ocurre lo mismo, por lo que también puedes reducir los decimales o quitarlos, con lo que los porcentajes aparecerán redondeados.

Tal cual nos da el dato porcentual

G	H	I	J
DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS			
HORAS	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA	FRECUENCIA PORCENTUAL
10	2	0,11	11,11%

Tras quitar los decimales

G	H	I	J
DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS			
HORAS	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA	FRECUENCIA PORCENTUAL
10	2	0,11	11%

Aquí también podemos incluir en el pie de la columna el total; basta con copiar la fórmula de **H14** o **I14** y pegar en **J14,** en cuyo caso el resultado será el 100 %.

Anotaciones

DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS			
HORAS	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA S RELATIVAS	FRECUENCIAS PORCENTUALES
10	2	0,11	11%
11	3	0,17	17%
12	5	0,28	28%
13	1	0,06	6%
14	2	0,11	11%
15	1	0,06	6%
16	0	0,00	0%
17	0	0,00	0%
18	2	0,11	11%
19	0	0,00	0%
20	2	0,11	11%
TOTAL:	18	1,00	100%

Anotaciones

Estadísticas con hojas de cálculo. La media y la mediana

Cálculo de la media

Vamos a seguir recogiendo información de los datos para calcular la **media,** o promedio.

1. Haz clic en la celda **D8** (puede ser en cualquier otra) y escribe **Media.**
2. En la celda **E8,** escribe **=AVERAGE(**
3. Se abrirá una ventana, para incluir los datos. Haz clic en la celda **B2** y arrastra hasta **B19.** Pulsa INTRO y nos ofrece la media.

Al igual que cualquier otra función, puedes escribirlas o buscarlas en el menú en el símbolo Σ, dentro de «Estadística».

4. Es muy posible que aparezcan muchos decimales. Recuerda que haciendo clic en el icono % de la barra de menús podrás reducir y redondear la cifra final.

Dato de la media con decimales		Tras quitar los decimales	
MEDIA	13,6111111	MEDIA	13,61

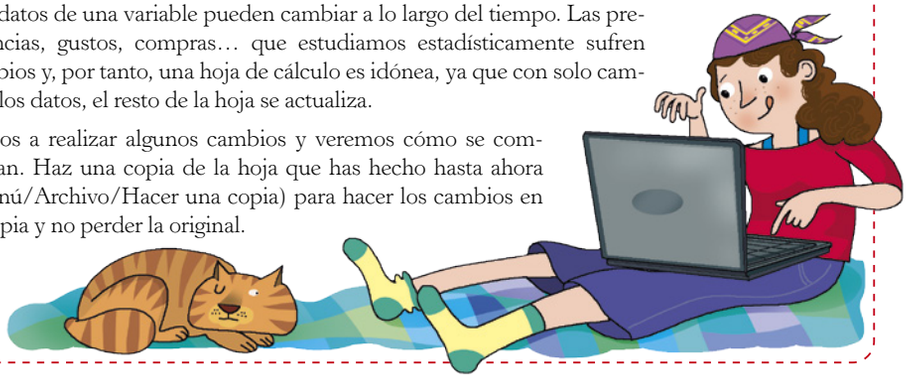
Cálculo de la mediana

El proceso es igual al anterior, solo cambiará la orden en el que tienes que escribir.

1. Haz clic en la celda **D9** (puede ser en cualquier otra) y escribe **Mediana.**
2. En la celda de la derecha **E9** escribe **=MEDIAN(**
3. Al igual que otras veces, se abrirá una ventana para incluir los datos. Haz clic en la celda **B2** y arrastra hasta **B19.** Finalmente, pulsa INTRO y el programa ofrecerá la mediana.

Los datos de una variable pueden cambiar a lo largo del tiempo. Las preferencias, gustos, compras… que estudiamos estadísticamente sufren cambios y, por tanto, una hoja de cálculo es idónea, ya que con solo cambiar los datos, el resto de la hoja se actualiza.

Vamos a realizar algunos cambios y veremos cómo se comportan. Haz una copia de la hoja que has hecho hasta ahora (Menú/Archivo/Hacer una copia) para hacer los cambios en la copia y no perder la original.



1. Cambia los datos de los 9 primeros compañeros sumando 5 a cada uno y haz lo mismo con los demás, restando 5 a cada uno. ¿Qué ocurre con el rango, la moda, la media y la mediana? ¿Qué observas en la distribución de las frecuencias?

Págs. 180 y 181 Sugerencias metodológicas

En la hoja de cálculo es el cálculo de la mediana y media aritmética es igual de sencillo que la realización del rango y la moda.

Recomendamos hacer una copia una vez realizado el ejercicio y sobre la copia animar al alumnado a introducir modificaciones en los datos para comprobar los cambios en el rango, moda, media y mediana.

Soluciones

Las soluciones de todas las actividades son digitales. Se indican unas orientaciones de lo que deben mostrar las respuestas una vez hechas.

1. Cambia a los siguientes datos:

Rango a 12.

Moda a 17.

Media a 11,39.

Mediana a 11,5.

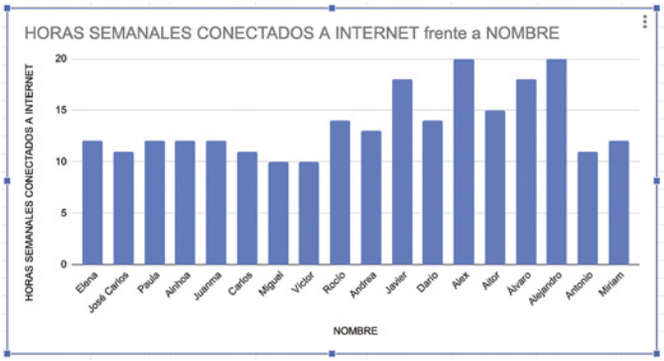
Todas sufren modificación.

Generar gráficos a partir de las tablas de datos I

Una de las propiedades de las hojas de cálculo es la facilidad para crear gráficos a partir de los datos de las tablas. Vamos a usar algunas de las tablas que ya has hecho para ver algunas de las posibilidades a la hora de generar gráficos.

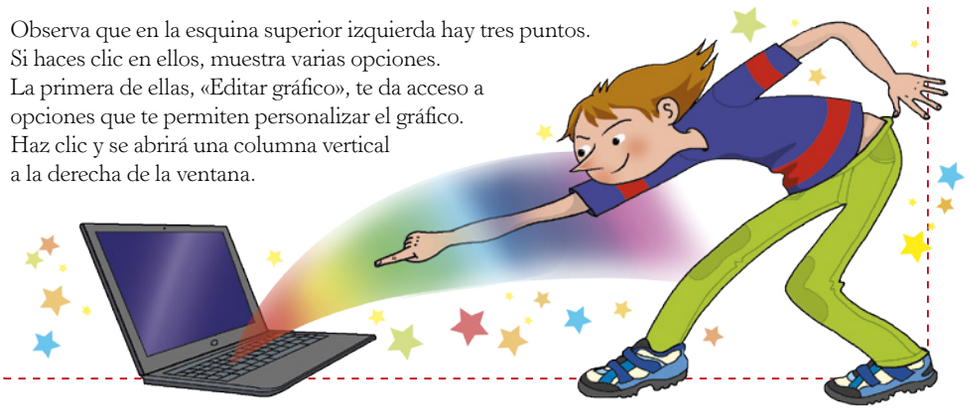
Vamos a usar la tabla de la variable de «Número de horas semanales conectados a Internet de mis compañeros y compañeras». Abre la tabla que has hecho.

1. Selecciona las columnas A y B haciendo clic en la cabecera. Estas columnas corresponden al nombre de los compañeros y las compañeras y a las horas semanales que están conectados a Internet.
2. En el menú de iconos haz clic en el de gráficos ( ). Aparecerá una ventana emergente rodeada con una línea azul y varios puntos cuadrados.



3. Haciendo clic sobre los cuadrados azules y arrastrando, puedes redimensionar el gráfico.
4. También puedes moverlo de un sitio a otro haciendo clic sobre el gráfico cuando está resaltado en azul.

Observa que en la esquina superior izquierda hay tres puntos. Si haces clic en ellos, muestra varias opciones. La primera de ellas, «Editar gráfico», te da acceso a opciones que te permiten personalizar el gráfico. Haz clic y se abrirá una columna vertical a la derecha de la ventana.



Anotaciones

DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS			
HORAS	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIAS RELATIVAS	FRECUENCIAS PORCENTUALES
10	1	0,10	10%
11	0	0,00	0%
12	0	0,00	0%
13	2	0,20	20%
14	0	0,00	0%
15	2	0,20	20%
16	1	0,10	10%
17	4	0,40	40%
18	0	0,00	0%
19	0	0,00	0%
20	0	0,00	0%
TOTAL:	10	1,00	100%

DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS			
HORAS	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIAS RELATIVAS	FRECUENCIAS PORCENTUALES
10	2	0,11	11%
11	3	0,17	17%
12	5	0,28	28%
13	1	0,06	6%
14	2	0,11	11%
15	1	0,06	6%
16	0	0,00	0%
17	0	0,00	0%
18	2	0,11	11%
19	0	0,00	0%
20	2	0,11	11%
TOTAL:	18	1,00	100%

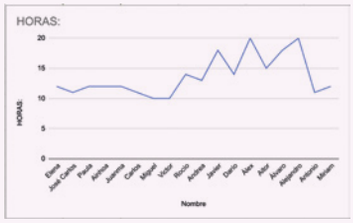
Anotaciones

Pág. 182 Sugerencias metodológicas

El desarrollo de las propuestas para la realización de las frecuencias es en sí un ejercicio. Conforme el alumnado vaya realizando los diferentes pasos deberá ir logrando lo que el docente tiene disponible en los ficheros resueltos indicados en el código QR y que además mostramos aquí.

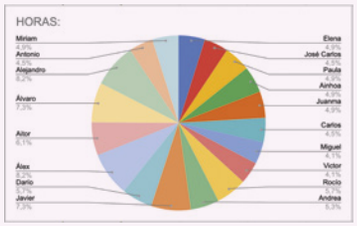
Soluciones

1. a) Gráfico de líneas simple:



b) Grafico de barras horizontal:

c) Gráfico de sectores:



2. Respuesta abierta.

3. Simplemente debe cambiar el gráfico de barras vertical al horizontal, lo cual cambia el orden de los ejes.

4. Para realizar la gráfica primero deberá seleccionar la columna H, haciendo clic sobre el cabecero, y luego pulsar el icono de gráficos.

Generar gráficos a partir de las tablas de datos II

En el menú «Editar gráficos» vamos a poner en práctica varias de las opciones que nos ofrece. En este menú tenemos dos pestañas: «Configuración» y «Personalizar». Vamos a usar la primera.

1 En la ventana de «Gráfico de columnas» cambia el gráfico a las siguientes opciones.

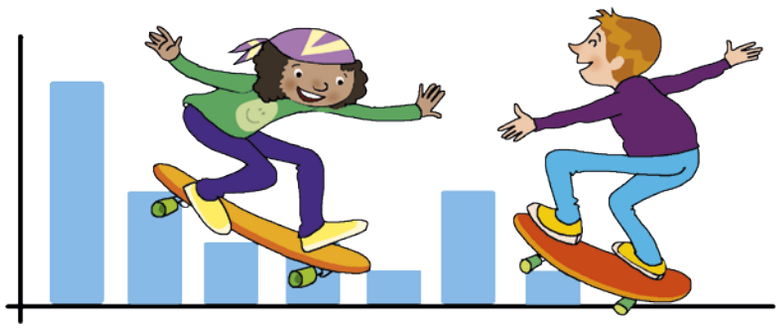
a) Gráfico de líneas simple.

b) Grafico de barras horizontal.

c) Gráfico de sectores.

2 En esa misma opción, investiga otras tres opciones diferentes a la anterior que permitan mostrar los datos.

3 En la gráfica de barras en vertical de la página anterior vamos a invertir el eje X y el eje Y. Busca en «Editar gráficos» la opción «Cambiar filas/columnas» e indica lo que ha ocurrido.



4 Crea el gráfico de barras de las frecuencias absolutas de la columna H.

5 Crea el gráfico circular de las frecuencias porcentuales de la columna J.

6 Haz de nuevo los ejercicios 4 y 5, pero cambiando los gráficos. Compáralos con los anteriores. ¿Cómo son? ¿Puedes explicar por qué?

182

Uso de las tablas en la resolución de problemas

Observo

En ocasiones, organizar la información que contiene el enunciado en una tabla nos puede ayudar a resolver determinados problemas.

Tres amigos se encuentran en la playa y comentan sobre el color de sus gorras.

- Mario dice: «Mi gorra no es ni negra ni roja, como las vuestras».
- Luca dice: «Me gustaría que mi gorra fuese amarilla como la tuya».
- Arturo dice: «Me gusta mi gorra roja».

¿De qué color tiene la gorra cada uno?

1 Crea una tabla donde recoger la información más relevante.

	NEGRA	ROJA	AMARILLA
MARIO	…	…	…
LUCA	…	…	…
ARTURO	…	…	…

2 Vuelve a leer el problema y completa la tabla a partir de la información que se ofrece.

	NEGRA	ROJA	AMARILLA
MARIO	No	No	Sí
LUCA	Sí	No	No
ARTURO	No	Sí	No

3 Finalmente, resuelve. **Mario lleva una gorra amarilla; Luca, negra, y Arturo roja.**

Sigo los pasos y resuelvo el problema

1 Lucía, Alicia y Maite han llegado hoy a su trabajo a diferentes horas. Una llegó a las 7, otra a las 8 y otra a las 9. Cada una llevaba puesta una blusa distinta: una llevaba una blusa azul, otra, una verde, y otra, una blanca. Averigua a qué hora llegó cada una y qué blusa llevaba a partir de la siguiente información:

- La que llegó a las 8 llevaba blusa azul. Alicia, que llegó la última, le comentó a la que llevaba la blusa verde que le quedaba muy bien. Lucía llegó la primera de todas.

Copia y completa la tabla en tu cuaderno. Luego resuelve.

HORA DE LLEGADA	07:00	08:00	09:00
NOMBRE	…	…	…
COLOR DE LA BLUSA	…	…	…

Anotaciones

Pág. 183 Sugerencias metodológicas

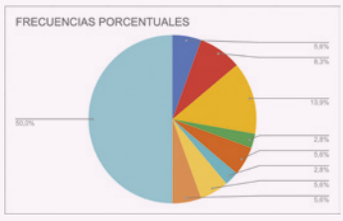
En esta página se trabaja una nueva estrategia para la resolución de determinados problemas: la ordenación de la información en tablas. Se pretende que el alumnado experimente e incorpore esta nueva estrategia y la utilice no solo en situaciones similares a las que aquí se proponen.

Es importante que antes de resolver los problemas propuestos el alumnado lea el enunciado en su totalidad y determine cuántos elementos y categorías serán necesarios para construir la tabla adecuada. Posteriormente se debe empezar a ordenar la información a partir del dato que aparezca como seguro.

En el ejercicio 1 se ofrece la tabla ya creada para que el alumnado la complete a partir de la información del problema. En el resto de los problemas serán los propios alumnos los que deberán construir su propia tabla decidiendo el número de filas y columnas que tendrá según la información que se ofrece en cada uno.

Soluciones

5. Para realizar la gráfica hacemos lo mismo que en el caso anterior, y una vez tengamos la gráfica de barras elegimos editar el gráfico y seleccionamos cualquiera de los gráficos circulares.



6. Respuesta abierta. Cualquier tipo de gráfico refleja los mismos datos de diferentes formas. Hay algunos tipos que debido a la tabla de datos no se muestran.

1.

HORA DE LLEGADA	7:00	8:00	9:00
Nombre	Lucía	Maite	Alicia
Color de la blusa	Verde	Azul	blanca

Anotaciones

Resuelvo problemas

2 Un grupo formado por cuatro amigos (Eloy, Gael, Pablo y Sebastián) tienen diferentes profesiones. Averigua a qué se dedica cada uno a partir de la siguiente información:

- Eloy y el bombero están enfadados con Sebastián.
- Gael es muy amigo del profesor.
- Eloy desde siempre se ha dedicado a la pintura.
- El futbolista es muy amigo de Pablo y del profesor.

3 Tres primos (Adrián, Emma y Marta) viven en tres ciudades diferentes (Madrid, Valencia y Sevilla). Además, cada uno tiene una afición distinta (pintura, voleibol y balonmano). Averigua dónde vive y qué afición tiene cada uno a partir de la información siguiente:

- Adrián no vive en Valencia.
- Emma no vive en Sevilla y no le gusta la pintura.
- Al que o a la que vive en Valencia no le gusta el voleibol.
- El o la que vive en Sevilla juega a balonmano.

4 La familia Gorrea tiene una larga tradición musical. Cinco de sus jóvenes miembros tocan algún instrumento. Alba, Marc, Ona, Juan y Laia tienen 8, 13, 10, 11 y 9 años, respectivamente, y en una semana cada uno recibe clases de música un solo día. Uno de ellos va a clase los lunes; otro, martes; otro, miércoles; otro, jueves, y otro, viernes. Además, se sabe lo siguiente:

- Alba solo puede ir a clase de música a partir del jueves.
- Marc va a clase un día después que Juan.
- Ona recibe clase el viernes.
- Ni Marc ni Juan pueden ir a clase los miércoles.

¿Cuántos años suman las edades de los miembros de esta familia que van a clase lunes y miércoles?

Pág. 184 Soluciones

2.

	BOMBERO	PROFESOR	PINTOR	FUTBOLISTA
Eloy	No	No	Sí	No
Luca	No	No	No	Sí
Pablo	Sí	No	No	No
Sebastián	No	Sí	No	No

3.

	EMMA	MARTA	ADRI
Ciudad	Madrid	Valencia	Sevilla
Afición	Voleibol	Pintura	Balonmano

4.

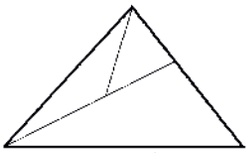
	LUNES	MARTES	MIÉRCOLES	JUEVES	VIERNES
Alba (8)	✗	✗	✗	✓	✗
Marc (13)	✓	✗	✗	✗	✗
Ona (10)	✗	✗	✗	✗	✓
Adrián (11)	✗	✓	✗	✗	✗
Laia (9)	✗	✗	✓	✗	✗

13 + 9 = 22 años

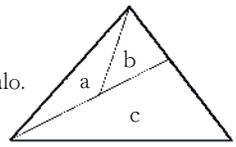
Problemas de recuento sistemático

Sigo los pasos y resuelvo el problema

Observa la figura siguiente y averigua cuántos triángulos tiene en total.



1. Asigna una letra a cada triangulo.



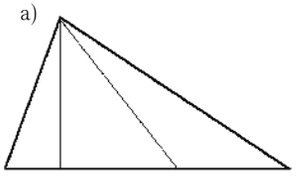
2. Cuenta cuántos triángulos formados por una letra hay.
3. Ahora cuenta cuántos triángulos se pueden formar uniendo dos letras.
4. Finalmente, cuenta cuántos se pueden formar uniendo tres letras.

En total, en esta figura hay … triángulos.

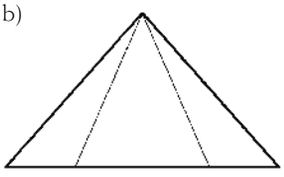
Resuelvo problemas

1. Sigue la estrategia anterior e indica cuántos triángulos tienen estas figuras.

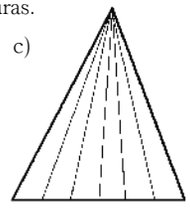
a)



b)

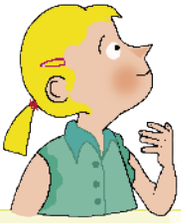


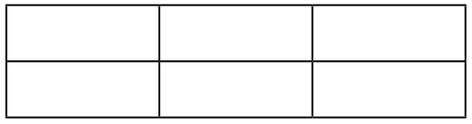
c)



Invento, creo y razono

2. Halla el número de cuadriláteros que tiene esta figura. Piensa: ¿podremos aplicar la misma estrategia que en los casos anteriores?





Anotaciones

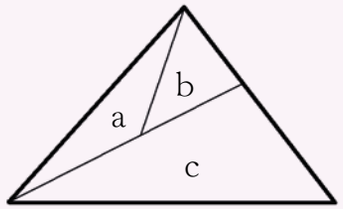
Pág. 185 Sugerencias metodológicas

Se presenta en esta página una tarea de resolución de problemas centrada en el recuento sistemático de figuras. Se pretende desarrollar la habilidad visual para identificar las diferentes formas de las figuras y, al mismo tiempo, conocer y aplicar diversos métodos a la hora contarlas.

En este tipo de tareas la concentración y el uso adecuado del sentido de la vista son primordiales. Sin embargo, hay estrategias que nos pueden facilitar la labor a la hora de hallar la solución correcta. Distinguimos principalmente dos:

- La primera estrategia sería la simple observación de la figura y el conteo mental de los triángulos que el alumnado observe. Se puede utilizar cuando la figura es sencilla.
- La segunda estrategia (la que se propone en el encabezado) consiste en asignar letras a las regiones simples y luego anotar las «combinaciones» de estas letras que formen la figura solicitada en el problema.

En el encabezado se marcan los pasos para resolver este tipo de situaciones. Esta sería la solución a dicha propuesta:



Triángulos de una letra: el a, el b y el c = 3 triángulos.

Triángulos de dos letras: el ab = 1 triángulo.

Triángulos de tres letras: el abc = 1 triángulo.

Total 5 triángulos.

Posteriormente se plantean dos actividades. El ej. 1 propone tres figuras distintas con diferentes cortes cada una. Es evidente que cuantos más cortes tengan mayores serán las combinaciones, es decir, habrá que formar figuras de una, dos, tres, cuatro letras, etc. Finalmente, el ejercicio 2 propone aplicar la misma estrategia para el cálculo de cuadriláteros.

Soluciones

1. a) 6 triángulos. b) 10 triángulos. c) 21 triángulos.

2. 18 cuadriláteros

Anotaciones

TAREA COMPETENCIAL

Tarea competencial: Viaje final de etapa I

El alumnado de 6.º termina la etapa primaria y, como colofón, llevarán a cabo el clásico viaje de fin de curso.

Este año, por unanimidad, han decidió ir a Londres. La AMPA les ayudará con ciertos preparativos. Acompáñalos en la organización de las tareas propuestas.

1 Para financiar parte del viaje, la AMPA ha preparado una serie de papeletas. Aquellos que consigan venderlas todas solo tendrán que pagar 200 € por el viaje. Los inscritos deberán abonar como anticipo un 10 % de dicho precio y el resto lo podrán pagar cómodamente en 3 pagos. ¿Cuánto tendrán que pagar cada vez?

a) 60 € b) 180 € c) 20 € d) 80 €

2 En total, cada alumno y alumna recibirá 50 papeletas que deberá vender a 2 €. ¿Cuál es el coste total (por alumno) del viaje?

a) 200 € b) 100 € c) 300 € d) 400 €

3 Al finalizar el plazo de venta de las papeletas, la AMPA recoge la cantidad vendida por cada alumno y alumna en una tabla, para así poder publicar los resultados de los 10 niños y niñas que más han vendido. Indica si son verdaderas o falsas las conclusiones a las que han llegado algunos al ver la tabla.

NOMBRE	Lucía	Ramón	Sonia	Sergio	Iker	Sofía	Hugo	Marcos	Vera	Silvia
PAPELETAS	50	48	45	41	40	40	37	35	34	30

a) La moda son 30 papeletas.

b) De media se han vendido 40 papeletas por alumno.

c) La mediana es 45.

d) El rango son 20 papeletas.

e) La moda son 40 papeletas.

f) La media y la mediana dan el mismo resultado.

g) El rango y la moda dan el mismo resultado.

Pág. 186 Sugerencias metodológicas

Valen aquí las mismas orientaciones que se han señalado para las Tareas competenciales anteriores.

Soluciones

1. Opción a).

2. Opción c).

3. a) La moda son 30 papeletas. F

b) De media se han vendido 40 papeletas por alumno. V

c) La mediana es 45. F

d) El rango son 20 papeletas. V

e) La moda son 40 papeletas. V

f) La media y la mediana dan el mismo resultado. V

g) El rango y la moda dan el mismo resultado. F

Pág. 187 Soluciones

1.

Nombre	Papeletas
Lucía	50
Ramón	48
Sonia	45
Sergio	41
Iker	40
Sofía	40
Hugo	37
Marcos	35
Vera	34
Silvia	30

- Nombre de la variable: «Papeletas vendidas para excursión» o similar.
- Nombre del encabezado de cada columna: «Nombre» y «N.º papeletas».
- Rango: 50 − 30 = 20.
- Media: 40.
- Mediana: 40.
- Moda: 40 (se repite dos veces).

REPASO

1 Introduce los datos de la tabla del ejercicio 3 de la tarea competencial de la página 186 (papeletas vendidas) en una hoja de cálculo. Indica en ella los siguientes datos:

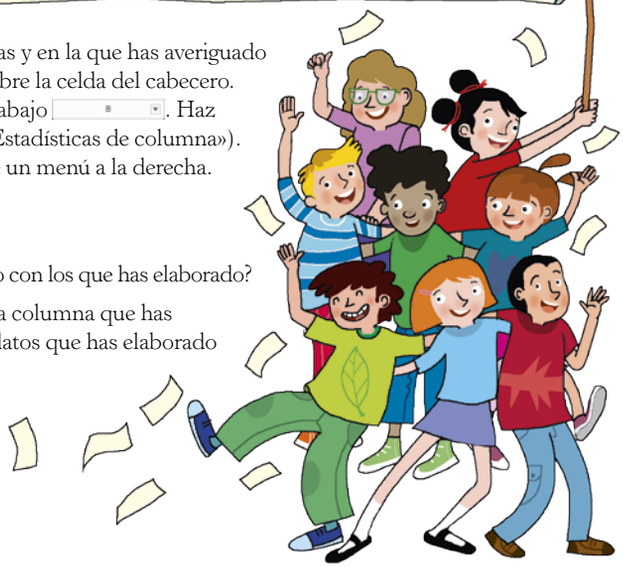
- Nombre de la variable.
- Nombre del encabezado de cada columna.
- Rango, media, mediana y moda.

2 Crea una tabla de frecuencias con la variable de papeletas vendidas en la que aparezcan las frecuencias absoluta, relativa y porcentual.

3 Continúa con la hoja de cálculo, creando cuatro diagramas de distintos tipos con los datos de las papeletas vendidas.

4 ¿Cómo cambiarían el rango, la media, la mediana y la moda si se hubieran vendido las siguientes papeletas?

NOMBRE	Lucía	Ramón	Sonia	Sergio	Iker	Sofía	Hugo	Marcos	Vera	Silvia
PAPELETAS	80	76	15	41	40	40	12	15	20	15



5 Sobre cualquier de las tablas realizadas y en la que has averiguado los datos estadísticos, pon el ratón sobre la celda del cabecero. Aparecerá una pequeña flecha hacia abajo. Haz clic en ella y busca la opción («Estadísticas de columna»). Al hace clic sobre esta opción se abre un menú a la derecha. Responde:

a) ¿De qué trata esta información?

b) Comprueba los datos. ¿Coinciden o con los que has elaborado?

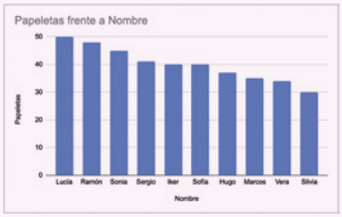
c) Modifica algunos de los datos de la columna que has seleccionado. ¿Qué ocurre en los datos que has elaborado y en los de esta columna?

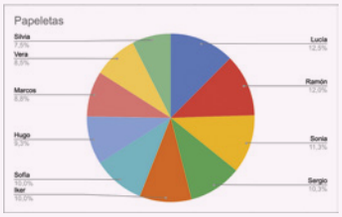
Anotaciones

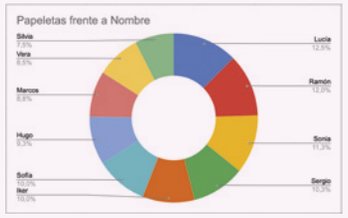
2.

DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS			
HORAS	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA	FRECUENCIA PORCENTUAL
50	1	0,11	11,11%
48	1	0,11	11,11%
45	1	0,11	11,11%
41	1	0,11	11,11%
40	2	0,22	22,22%
37	1	0,11	11,11%
35	1	0,11	11,11%
34	1	0,11	11,11%
TOTAL:	9	1	100%

3. A modo de ejemplo:







4. - Rango: 80 − 12 = 68.
- Media: 35,4.
- Mediana: 30.
- Moda: 15.

5. Esta opción muestra directamente el estudio estadístico que hemos realizado paso a paso. En relación con las propuestas la respuesta está abierta en función de los datos elegidos.

12 TIPOS DE ECUACIONES

Presentación de la unidad

La última unidad del curso presenta un contenido variado: álgebra, lenguaje digital, educación financiera, problemas de móviles… Despedida a lo grande.

A lo que dedica más atención es al álgebra. Se ocupa de las ecuaciones de primer grado, en su resolución clásica o por la vía del tanteo, así como por los problemas que resuelven. En cuanto al pensamiento computacional se trabaja el código binario: la numeración en base dos. De acuerdo con nuestra experiencia, tal contenido se puede trabajar ya con niños de 7-8 años. El conocimiento del código binario permite que también se aborden los órdenes de magnitud que están detrás de las unidades de medida de información.

Dentro de la Educación financiera se trata el cambio de divisas y de la resolución de los problemas asociados. Es un tema que resulta sencillo para los niños. Y cuatro páginas añadidas se dedican a la resolución de problemas. Además de los centrados en las ecuaciones y en los cambios de divisas, se trabajan problemas de móviles y los que aparecen en la Tarea competencial.

Sugerencias metodológicas

La introducción del pensamiento algebraico en la Educación Primaria es una de las novedades del nuevo currículum derivado de la LOMLOE. En ABN ya la habíamos introducido desde hace bastantes cursos. Por ello tenemos una amplia tradición en el tratamiento didáctico de la misma. De acuerdo con nuestra experiencia, la resolución de ecuaciones de primer grado resulta algo sencillo para los alumnos de Primaria de los cursos altos, como es el caso. Inclusive el método de resolución por tanteo lo desarrollan y aprenden con normalidad. Sí es importante subrayar algo al respecto: la resolución de ecuaciones debe acompañarse del problema que viene a resolver, y no como la aplicación de una fórmula en el vacío. Hay en la red numerosos vídeos en los que alumnas y alumnos, desde 3.º de Primaria, resuelven ecuaciones de primer grado. Finalmente, en este curso los alumnos no emprenden un aprendizaje desde cero, sino que culminan un proceso que iniciaron en 4.º de Primaria.

Dentro del Pensamiento computacional, la unidad se ocupa del sistema de numeración que sirve de base al lenguaje computacional: la numeración en base dos o el código binario. Solo se utilizan las cifras cero y uno, y para los niños es bastante fácil entenderlo y aplicarlo. Ya en 2.º de Primaria tenemos experiencias en las que el alumnado trabajaba, en órdenes de magnitud bajos, el paso de números en base decimal a base dos y viceversa. Trabajamos en el código binario hasta el octavo orden de magnitud. ¿Por qué hasta ahí? Porque es donde se forma una unidad de orden superior en la medida de la información. La más sencilla es el bit, y a partir de ese orden es el byte, que equivale a 128 bits. Tras ella vendrá el kilobyte, el megabyte, etc.

Consideramos que, dentro de un enfoque competencial, los alumnos de Primaria han de salir con una formación, aunque sea somera, sobre las divisas, esto es, sobre los sistemas monetarios que se emplean en otros países que tienen como unidad el euro. Nos ceñimos a las divisas más importantes y más conectadas al ambiente de los niños: la libra esterlina, el dólar estadounidense y el yen japonés.

Resolución de problemas

Además de los problemas sobre ecuaciones y sobre cambios de divisas, a los que ya hemos hecho referencia, hemos introducido problemas sobre móviles (paso de km/h a m/s, relación y conexión de la velocidad con el tiempo, representación gráfica del movimiento y trayectos continuos y discontinuos y su representación gráfica).

La Situación de aprendizaje elegida combina diversos contenidos competenciales: móviles, cambio de divisas, unidades de peso, unidades de tiempo y de paso de código binario a código decimal. El tema es el viaje fin de curso, que, desde luego, da mucho de sí.

Educación en valores

El tema de las ecuaciones es una plataforma muy apropiada para trabajar el valor de la curiosidad, con la incógnita de qué número será y el desafío de «despejar» las dificultades para llegar a la solución.

La curiosidad arranca con una pregunta y desde pequeños nos han educado en buscar las respuestas entre la información de la que disponemos. Y hay preguntas que tienen respuestas específicas, concretas y medibles. Hemos aprendido, a través de la deducción, a encontrar esas respuestas y a recibir un reconocimiento por ello.

Sin embargo, existen unas preguntas destinadas a obtener información y preguntas realizadas desde la curiosidad de no saber cuál va a ser la respuesta, que invitan a indagar y descubrir. La curiosidad implica interés por descubrir lo que aún no se sabe, y así se acaba aprendiendo.

Al alumnado hay que enseñarle que este procedimiento es natural y que debemos esforzarnos, sin caer en la negación, en resolver los problemas que nos plantea nuestra curiosidad. Para ello disponemos de técnicas como la búsqueda de información por distintos medios, retrotraernos a situaciones similares, probar con el método de ensayo y error, o, si se nos resiste, aplazarlos para otro momento y así despejar la mente. Es muy positiva la sensación de satisfacción que se obtiene al alcanzar la solución del problema y ello activará la curiosidad ante nuevas situaciones problemáticas.

Recursos y materiales recomendados

-

  Para la resolución de ecuaciones debemos utilizar la plantilla o rejilla para el cálculo ABN. Sin embargo, previamente a su utilización conviene realizar un repaso de cómo cambiamos de base para lo que usaremos materiales sencillos como cubiteras de hielo y garbanzos o similares.

Pensamiento computacional

Repaso de las principales estrategias de cálculo mental trabajadas a lo largo de curso. El docente deberá seleccionar aquellas que considere de mayor relevancia o en las que su alumnado ha encontrado mayor dificultad. A continuación, se proponen algunas:

- Restas de tres y cuatro cifras con y sin decimales con rebasamiento.
- División de tres o cuatro cifras (con o sin decimales) entre una cifra.
- Producto de un dígito por un dígito con decimales en ambos factores: $4{,}3 \times 0{,}8$ - $0{,}27 \times 0{,}6$ - etc.
- Potencias:
  - Cuadrados de semidecenas.
  - Cuadrados de decenas incompletas.
- Números enteros: sumas y restas sencillas.
- Sumas y restas de fracciones con diferente denominador.

Esquema

Tipos de ecuaciones

Álgebra

- Ecuaciones de primer grado. Repaso de los tipos 1, 2, 3 y 4.
- Ecuaciones de primer grado. Tipos 5 y 6.
- Ecuaciones de primer grado resueltas por tanteo.

Pensamiento computacional

- Código binario y numeración en base dos.
- Órdenes de magnitud con el código binario.

Educación financiera

- Cambios de divisas.

Problemas

- Problemas de ecuaciones de primer grado.
- Problemas sobre cambios de divisas.
- Problemas de móviles.
- Tarea competencial.

Anotaciones

TIPOS DE ECUACIONES

Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones matemáticas en las cuales hay unos valores conocidos y otros desconocidos, que representamos con la letra «*x*» y que se conocen como **incógnita.**

Como esta letra se puede confundir con el signo de multiplicar, «×», en las ecuaciones se representa con un punto, «·», o, simplemente, si está junto a un número, se entiende que lo está multiplicando. Sea, por ejemplo, $5x$: se entiende que el 5 está multiplicando al valor de la *x*. Si suponemos, por ejemplo, que su valor es 4, entonces $5x = 5 \cdot 4 = 20$.

Ecuación tipo 1

Son ecuaciones que contienen sumas o restas.

Si gano 15 cromos, tendré 42, los mismos que mi amigo. ¿Cuántos cromos tengo ahora?

Llamaremos *x* a los cromos que tienes ahora y que desconocemos. $x + 15 = 42$

Si quitamos los 15 cromos en ambos lados de la igualdad, nos queda la solución:

$x = 27$ **Solución:** tengo 27 cromos.

He visto 8 episodios de una serie y aún me quedan 13 episodios para acabarla. ¿Cuántos episodios tiene la serie?

Llamaremos *x* a la cantidad de capítulos que tiene la serie. $x - 13 = 8$.

Si añadimos los episodios por ver, nos queda la solución: $x = 21$.

Ecuación tipo 2

Son ecuaciones que contienen productos o divisiones.

En 5 coches viajan un total de 20 personas. Si en cada coche viaja el mismo número de personas, ¿cuántos van en cada coche?

Llamaremos *x* a la cantidad de personas en cada coche y que no sabemos cuántos son. $5x = 20$

Si dividimos los dos términos por 5, tenemos la solución: $x = 4$.

La quinta parte de los bombones de una caja son 5. ¿Cuántos bombones tiene la caja?

x son los bombones que tiene la caja. $\frac{x}{5} = 5$. Si multiplicamos los dos términos por 5, tenemos la solución: $x = 25$.

1 Resuelve mentalmente las siguientes ecuaciones.

a) $x + 7 = 18$ c) $15 + x = 27$ e) $6x = 24$ g) $\frac{x}{6} = 7$

b) $26 = x - 9$ d) $36 - x = 21$ f) $8x = 40$ h) $\frac{x}{2} = 16$

188

Pág. 188 Sugerencias metodológicas

Los dos primeros tipos de ecuaciones son los casos más sencillos, no exigen ningún procedimiento especial y alcanzan pleno significado incluso para los niños y las niñas más pequeños. Nótese que en una ecuación del tipo $x + 12 = 23$ no se trata más que de averiguar cuántos bombones hay en una caja si después de añadir 12 tenemos 23. La ecuación tipo 1 es también la que recoge una resta. Por ejemplo: $x - 6 = 14$, que se traduce en un problema como el siguiente: «He perdido seis euros y me quedan 14. ¿Cuánto dinero tenía?». Lo que es más importante subrayar de este tipo de ecuación es el procedimiento de resolución, que supone retrotraer los cálculos a un estado inicial. En el ejemplo primero, para saber el número de bombones hay que quitar (restar) los que se han añadido. En el segundo, para saber el dinero que teníamos hay que reponer (sumar) lo que se había perdido. Este significado es el que se encuentra en la base de la transposición de términos. Si, en el tipo primero ($x + 12 = 23$) quito los doce bombones, es evidente que ya no hay 23, sino 11 ($x = 23 - 12 = 11$). En el otro ejemplo ($x - 6 = 14$), si añado seis euros ya no hay 14, sino 20 ($x = 14 + 6 = 20$).

Las de tipo 2 ($4x = 24$) obligan también a utilizar la operación inversa. Si cuatro estuches tienen 24 lápices, es evidente que si dividimos el número de estuches por cuatro, el número total queda dividido por cuatro ($4x/4 = 24/4$, luego $x = 6$). De la misma manera, si $x/3 = 6$, $3x/3 = 3 \times 6$, y, por tanto, $x = 18$.

Soluciones

1. a) $x = 11$ c) $x = 12$ e) $x = 4$ g) $x = 42$

b) $x = 25$ d) $x = 15$ f) $x = 5$ h) $x = 32$

Repaso de ecuaciones: tipos 3 y 4

Ecuación tipo 3

Este tipo de ecuaciones contienen productos combinados con sumas o restas.

3 jugadores hemos cogido el mismo número de cartas de un montón, y han sobrado 13. Si la baraja tiene 40 cartas, ¿cuántas cartas hemos cogido cada uno?

Llamaremos x a las cartas que hemos cogido cada uno. $3x + 13 = 40$. Cada jugador ha cogido 9 cartas.

	$3x + 13$	$= 40$
$- 13$	$3x$	27
$: 3$	x	9

Hemos preparado 5 ramos de flores, de los que hemos quitado 10 que estaban estropeadas. Si hemos usado 50 flores, ¿cuántas flores pusimos en cada ramo?

x son las flores de cada ramo. $5x - 10 = 50$. Cada ramo tenía 12 flores.

	$5x - 10$	$= 50$
$+ 10$	$5x$	60
$: 5$	x	12

Ecuación tipo 4

Estas ecuaciones contienen la incógnita x en ambos lados de la igualdad, con operaciones de suma y productos.

Dos móviles cuestan lo mismo que un móvil, más 80 €. ¿Cuánto cuesta un móvil?

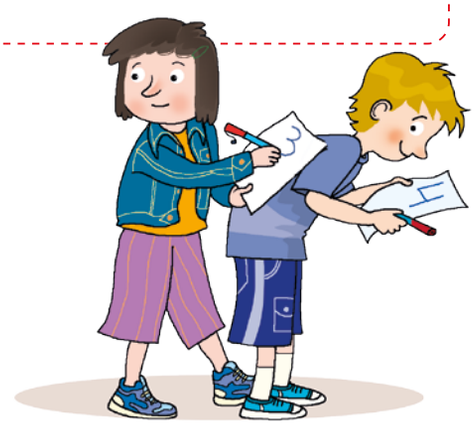
x será el precio del móvil. $2x = x + 80$. Cada móvil cuesta 80 €.

	$2x$	$= x + 80$
$- x$	x	80

En 4 coches viajan el mismo número de personas que las que van en 2 coches, más 6 personas. ¿Cuántas personas viajan en un coche?

x son las personas que van en coche. $4x = 2x + 6$. En cada coche viajan 3 personas.

	$4x$	$= 2x + 6$
$- 2x$	$2x$	6
$: 2$	x	3



1 Resuelve las siguientes ecuaciones tipo 3.

a) $6x + 5 = 23$ c) $33 = 8x - 7$

b) $7x - 5 = 9$ d) $40 = 10 + 2x$

2 Resuelve las siguientes ecuaciones tipo 4.

a) $2x = x + 4$ d) $4x = 2x + 14$

b) $x + 8 = 2x$ e) $4x = x + 9$

c) $4x = 3x + 5$ f) $11x = x + 100$

Anotaciones

Pág. 189 Sugerencias metodológicas

La ecuación de tipo 3: $4x + 6 = 14$ cierra los modelos en los que la incógnita aparece en un solo miembro. Es la combinación de los tipos 1 y 2, y se aconseja ya que se utilice la rejilla. La rejilla posibilita dar los pasos en un orden o en otro. En el ejemplo que aparece, se ha optado primero por dejar en un miembro solo el término x, entre otras cosas por la dificultad de dividir 14 entre 4. Pero con números más apropiados hubiera sido indistinto el orden de los pasos.

La ecuación de tipo 4 es clave, porque su solución requiere de una intuición natural del niño o la niña. En el ejemplo $2x = x + 3$, la intuición debe consistir en percibir que si dos incógnitas son lo mismo que una incógnita más otra cantidad, es evidente que una de las incógnitas del miembro de la izquierda es igual a la incógnita del miembro de la derecha, y la incógnita que queda en el miembro de la izquierda es igual a la cantidad que queda en el miembro de la derecha. Esta intuición es clave, y no se debe seguir adelante si no ha sido bien entendida.

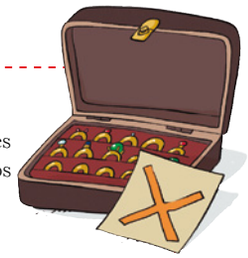
Soluciones

1. a) $x = 3$ b) $x = 2$ c) $x = 5$ d) $x = 15$

2. a) $x = 4$ b) $x = 8$ c) $x = 5$ d) $x = 7$ e) $x = 3$ f) $x = 10$

Anotaciones

Ecuaciones tipo 5



Ecuación tipo 5 → $2x + 4 = 3x - 6$

En una joyería guardan los anillos en cajas. Si a los que guardan en 2 cajas les añadimos 4 anillos, tenemos los mismos anillos que si a 3 cajas les quitamos 6 anillos. ¿Cuántos anillos guardan en cada caja?

Llamaremos x a los anillos que desconocemos que hay en las cajas.

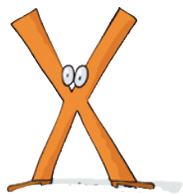
1. Restamos 2 cajas de anillos. En el primer miembro quedan 4 anillos, y en el segundo, una caja a la que le faltan 6 anillos.
2. Añadimos 6 anillos a la caja, para que no falte nada. Si a una caja a la que le faltan 6 anillos (tiene 4) le añadimos 6 anillos, completamos la caja. Por tanto, cada caja tiene 10 anillos.

	$2x + 4$	$= 3x - 6$
$- 2x$	4	$= x - 6$
$+ 6$	10	$= x$

1 Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $2x + 8 = 3x - 2$ c) $5x - 4 = 2x + 11$

b) $8x + 3 = 5x + 6$ d) $3x - 1 = 5x - 7$



2 El doble de un número menos 7 es igual al mismo número más 22. ¿De qué número se trata?

3 Si de una garrafa vaciamos 6 litros, nos quedan los mismos litros que si de 3 garrafas vaciamos 26 L. ¿Cuántos litros caben en la garrafa?

4 ¿Cuánto cuesta un viaje en los coches de choque? El coste de 20 viajes más 10 € es el mismo que el de 30 viajes menos 10 €.

5 Invéntate problemas para las siguientes ecuaciones.

a) $2x + 8 = 3x - 2$

El doble de un número más 8 es igual al triple de ese número menos 2. ¿De qué número se trata?

b) $5x - 4 = 2x + 11$

c) $8x + 3 = 5x + 6$

d) $3x - 1 = 5x - 7$

e) $2x + 5 = 3x - 5$

Pág. 190 Sugerencias metodológicas

Las ecuaciones de tipo 5 son las que tienen en ambos miembros términos con la incógnita, si bien esa incógnita aparece ligada a operaciones de estructura aditiva y no de estructura multiplicativa. Con este tipo de ecuaciones ya se puede seguir todo el proceso de solución, puesto que, en síntesis, alcanza la complejidad de cualquier ecuación. Se ha de dejar claro a los niños y las niñas: 1.º Que el objetivo de lo que hagamos ha de ser dejar una x sola en un miembro y una cantidad en el otro. 2.º Que, para ello, añadimos o quitamos incógnitas o cantidades para conseguirlo. Repasamos lo anterior con el ejemplo del libro. Sea la ecuación **$2x + 4 = 3x - 6$.**

1.º Decisiones para dejar una única incógnita en un miembro:
- Se deja la x en el segundo miembro, que es donde hay más.
- Hay que quitar las $2x$ del primer miembro, y el -6 del segundo miembro.

2.º Proceso de resolución:

	$2x + 4$	$= 3x - 6$
$- 2x$	4	$= x - 6$

Si se quitan 2x, ya se deja una x en el lugar buscado, que es el segundo miembro.

	$2x + 4$	$= 3x - 6$
$- 2x$	4	$= x - 6$
$+ 6$	10	$= x$

Si se añaden 6, queda resuelta la ecuación.

Actividad de ampliación

1. ¿Cuántos kilómetros tiene un circuito de velocidad si la moto que le da tres vueltas y además recorre dos kilómetros hace la misma distancia que si le faltaran dos kilómetros para dar cuatro vueltas? ($3x + 2 = 4x - 2$; $x = 4$. El circuito tiene 4 km).

Soluciones

1. a) $x = 10$ b) $x = 5$ c) $x = 1$ d) $x = 3$

2. $2x - 7 = x + 22$. Se trata del número 29.

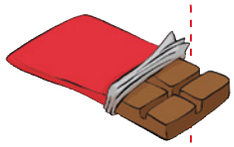
3. $x - 6 = 3x - 26$. En la garrafa caben 10 litros de agua.

4. $20x + 10 = 30x - 10$. Un viaje cuesta 2 €.

5. Caben múltiples soluciones.

Ecuaciones tipo 6

Ecuación tipo 6 → $\frac{x}{2} + 7 = 3x - 33$



La mitad de las chocolatinas que hay en un envase más 7 chocolatinas son las mismas que las que hay en 3 envases menos 33 chocolatinas.

Quitamos 7. Un miembro de la ecuación tiene medio envase, y el otro, 3 envases a los que les faltan 40 chocolatinas.

Multiplicamos por 2. El medio envase se convierte en 1, y en el otro miembro hay 6 envases a los que les faltan 80 chocolatinas.

Añado 80 chocolatinas. En el primer miembro tengo un envase más las 80 chocolatinas y en el segundo miembro no les falta ninguna.

Quito un envase. Me quedan solo las 80 chocolatinas en un miembro y 5 envases en otro.

Divido entre 5 y ya tengo la solución: 16 chocolatinas por envase.

	$\frac{x}{2} + 7$	$= 3x - 33$
$- 7$	$\frac{x}{2}$	$= 3x - 40$
$\times 2$	x	$= 6x - 80$
$+ 80$	$x + 80$	$= 6x$
$- x$	80	$= 5x$
$: 5$	16	$= x$

1 Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $\frac{x}{2} + 8 = 2x - 4$ b) $\frac{x}{4} + 17 = 4x + 2$ c) $2x + \frac{x}{5} = x + 12$

2 ¿Cuánto peso si la mitad de mi peso más 20 kilos es igual a mi peso más 4 kilos?

3 Si al doble de un número le sumamos 4, obtenemos su triple más 2. ¿De qué número se trata?

4 Una garrafa y media tiene los mismos litros que tres garrafas menos 12 L. ¿Cuántos litros caben en una garrafa?

5 Invéntate problemas para las siguientes ecuaciones.

a) $\frac{x}{2} + 8 = 2x - 4$ → La mitad de lo que cuesta un álbum de cromos más 8 € es igual al doble de lo que cuesta menos 4 €. ¿Cuánto cuesta?

b) $\frac{x}{4} + 17 = 4x + 2$ c) $2x + \frac{x}{5} = x + 12$ d) $x + 5 = x + \frac{x}{2} - 1$

Anotaciones

Pág. 191 Sugerencias metodológicas

La ecuación de tipo 6 es como la de tipo 5, pero añadiéndole la complicación de que la incógnita aparece en los dos miembros y, en al menos en uno de ellos, asociada a una operación de estructura multiplicativa. Por tanto, la resolución de una ecuación de este tipo necesita ya manejarse con las cuatro operaciones que pueden estar presentes en la misma. En la página se explica paso a paso la resolución de una ecuación típica de este nivel de dificultad.

Soluciones

1. a) $x = 8$ b) $x = 4$ c) $x = 10$

2. $x/2 + 20 = x + 4$. Peso 32 kg.

3. $2x + 4 = 3x + 2$. Se trata del número 2.

4. $x + x/2 = 3x - 12$. En una garrafa caben 8 litros.

5. Caben múltiples soluciones.

Anotaciones

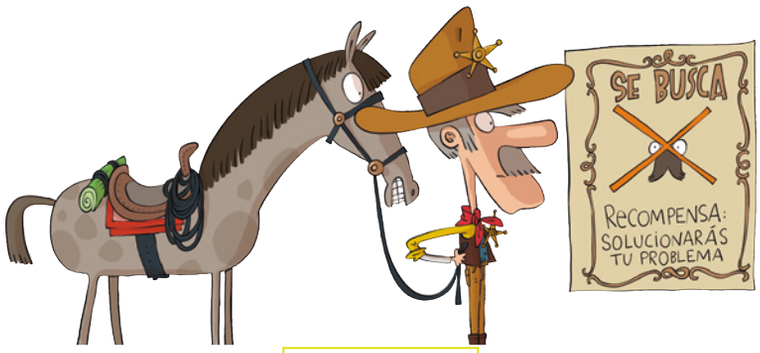
Ecuaciones por tanteo I

Hay niños y niñas que resuelven las ecuaciones de una manera original, por tanteo. El tanteo consiste en reflexionar y considerar detenidamente algo antes de llevarlo a cabo. Y lo hacen así:

$$8x + 3 = 5x + 6$$

1. Vamos a probar con $x = 3$. La ecuación queda $(8 \times 3) + 3 = (5 \times 3) + 6$; es decir, 27 y 21. La diferencia entre ambos términos es 6.
2. Probamos con $x = 2$. Haciendo las sustituciones, los valores de cada uno de los términos son 19 y 16. La diferencia entre términos es de 3.
3. Vemos que cada unidad que disminuye, el valor de la x hace que la diferencia disminuya en 3 puntos.

   Si a un valor 3 le corresponde una diferencia de términos de 6, y a un valor 2, una diferencia de 3, nos planteamos que x puede ser 1.
4. Lo comprobamos. Si $x = 1$ al hacer las sustituciones, entonces $11 = 11$.



$$2x + 20 = 6x - 12$$

1. Probamos con $x = 4$. La ecuación queda así.

   $(2 \times 4) + 20 = (6 \times 4) - 12$; o sea 28 y 12. La diferencia entre los términos es 16.
2. Con $x = 5$, haciendo las sustituciones, los valores de cada uno de los términos son 30 y 18. La diferencia entre los términos es de 12.
3. Observa que cada unidad que aumenta el valor de la x hace que la diferencia disminuya en 4 puntos. Si a un valor 4 le corresponde una diferencia de términos de 16, y a un valor 5, una diferencia de 12, ¿cuál es el valor de x?
4. Compruébalo.

1 Resuelve estas ecuaciones por tanteo. Puedes usar la plantilla.

a) $22 = 2x + 12$ b) $4x + 8 = 6x$ c) $3x - 2 = 2x + 4$ d) $\frac{x}{3} + 7 = 3x - 17$

Pág. 192 Sugerencias metodológicas

Para resolver ecuaciones no siempre han de seguirse necesariamente los pasos indicados con anterioridad. En muchos casos, por su sencillez y con un estudio reflexivo, puede encontrarse la solución por tanteo. En el libro del alumno se presentan dos casos concretos y, a continuación, ofrecemos otro de ampliación: $\mathbf{3x - 1 = 5x - 7.}$

El alumnado participará en los pasos 3.º y 4.º.

Se estudia la ecuación.

1.º Probamos con $x = 5$. La ecuación queda así:

$(3 \times 5) - 1 = (5 \times 5) - 7$; o sea 14 y 18. La diferencia entre términos es: $\mathbf{-4.}$

2.º Probamos con $x = 4$. Haciendo las sustituciones, los valores de cada uno de los términos son 11 y 13. La diferencia entre términos es de $\mathbf{-2.}$

3.º Observamos que cada unidad que disminuye el valor de la x hace que la diferencia disminuya en 2. Si a un valor 5 le corresponde una diferencia de términos de -4, y a un valor 4 una diferencia de -2, pensemos: ¿cuál es el valor de x? Será $x = 3$.

4.º Comprobamos que es cierto: $(3 \times 3) - 1 = (5 \times 3) - 7$.

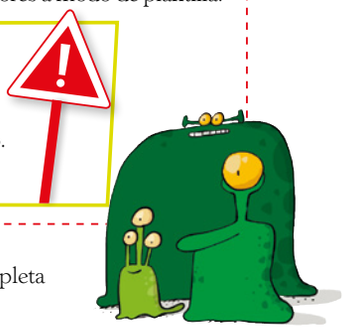
Soluciones

1. a) $x = 5$ b) $x = 4$ c) $x = 6$ d) $x = 9$

Ecuaciones por tanteo II

Para resolver por tanteo las siguientes ecuaciones, emplea los pasos anteriores a modo de plantilla:

1. Prueba con un primer valor: $x = \ldots$
2. Si no has acertado, prueba con un segundo valor: $x = \ldots$
3. Estudia la diferencia entre los dos valores y deduce el resultado.
4. Comprueba si es verdad.



1 Resuelve las siguientes ecuaciones por tanteo y con las soluciones completa en tu cuaderno la frase oculta.

Haré de mi $2x + 23 = x + 30$ una $7x - 4 = 15x - 28$:

sumaré $7x - 4 = 4x + 8$, restaré $\frac{x}{3} = x - 6$, dividiré las $\frac{x}{2} + 8 = 2x + 5$

y multiplicaré el $12 - \frac{x}{4} = x - 3$.

Claves

¡Cuidado! Quizá te sobre alguna clave.

$x = 1$ risa	$x = 3$ matemática:	$x = 5$ sorpresas	$x = 9$ dolor
$x = 2$ penas	$x = 4$ alegrías	$x = 7$ vida	$x = 12$ amor.

Vamos a inventar una ecuación cuya solución sea $x = 8$ y que tenga una suma en el primer término y una resta en el segundo. ¡Podemos obtener muchas ecuaciones distintas! ¡Una pista!: Empezamos primero por un término y luego ajustamos el segundo término.

- Si elegimos como primer término x + 3, el resultado será 8 + 3 = 11.
- Sabemos que el segundo término tiene que valer también 11; si empiezo, por ejemplo, con $2x = 2 \times 8 = 16$, debo quitar 5 para que valga 11, quedando así: $2x - 5$.

Por tanto, la ecuación es $x + 3 = 2x - 5$.

2 Invéntate ecuaciones que cumplan estas condiciones.

a) $x = 3$ y hay una suma en cada uno de los términos.

b) $x = 2$ y hay una resta en el primer término y una suma en el segundo.

c) $x = 6$ y hay una resta en cada término.

d) $x = 5$ y hay una suma en el primer término y una resta en el segundo.

Anotaciones

Pág. 193 Sugerencias metodológicas

Encabezamos la página con un resumen guía para la resolución de ecuaciones por tanteo y, a continuación, planteamos varias para resolverlas siguiendo la plantilla, a modo de juego para descubrir una frase oculta.

Soluciones

1. Haré de mi ($x = 7$) **vida** una ($x = 3$) **matemática:** sumaré ($x = 4$) **alegrías,** restaré ($x = 9$) **dolor,** dividiré las ($x = 2$) **penas** y multiplicaré el ($x = 12$) **amor.**

2. Continuamos con la propuesta de inventar ecuaciones, conociendo el valor final de la incógnita. Para hacerlo más sencillo, la iniciamos con un ejemplo en el cual se aconseja empezar por uno de los términos y, una vez conocido, ajustar el segundo. Después de plantear la ecuación, inventaremos su redacción. Las propuestas pueden desarrollarse libremente, con la única condición de que se puedan resolver.

Anotaciones

Problemas sobre ecuaciones I

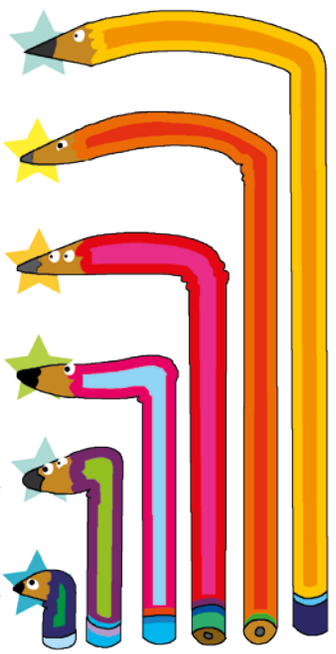
De la ecuación al enunciado de un problema

Vamos a ver un ejemplo de ecuación tipo 5: $\mathbf{4x + 8 = 6x - 2}$

1. La incógnita x deber ser algo que contenga una cantidad fija. Por ejemplo: una caja, una bolsa, un saco, cualquier tipo de vehículo, un jarrón de flores, una hucha, un monedero…
2. Una vez que sepas qué va a ser la incógnita, el resto de los datos numéricos conocidos deben ir en relación con ella, añadiendo, quitando, multiplicando o dividiendo.
3. En nuestro ejemplo: $\mathbf{4x + 8 = 6x - 2}$
   - La incógnita va a ser los bombones que contiene una caja.
   - $4x$ significa que tendríamos 4 cajas en el primer miembro, y $6x$, que tenemos 6 cajas en el segundo.
   - Además, vamos a añadir 8 bombones a las 4 cajas y quitaremos 2 a las 6 cajas.
4. La redacción del problema podría quedar así:

Si a los bombones que hay en 4 cajas les añadimos 8, tendremos los mismos que si de los que hay en 6 cajas de bombones me comiera 2. ¿Cuántos bombones tiene cada caja?

1. Crea la redacción de un problema para estas ecuaciones tipo 1.
   a) $5 + x = 12$ b) $x - 7 = 13$
2. Crea la redacción de un problema para estas ecuaciones tipo 2.
   a) $8x = 32$ b) $\frac{x}{6} = 4$
3. Crea la redacción de un problema para estas ecuaciones tipo 3.
   a) $2x + 6 = 20$ b) $3x - 3 = 21$
4. Crea la redacción de un problema para estas ecuaciones tipo 4.
   a) $x + 11 = 2x$ b) $5x - 15 = 2x$
5. Crea la redacción de un problema para estas ecuaciones tipo 5.
   a) $2x + 2 = 3x - 2$ b) $4x - 3 = 6x - 15$
6. Crea la redacción de un problema para estas ecuaciones tipo 6.
   a) $\frac{x}{5} - 2 = x - 18$ b) $x - 2 = \frac{4x}{3} - 2$



Pág. 194 Sugerencias metodológicas

También en los problemas de ecuaciones es procedente aplicar las estrategias del «viaje de ida y vuelta». Es tan importante idear un problema de ecuaciones, como, a la vista de una ecuación, saber inventar una situación en la que la solución de esa ecuación alcance sentido. En esta página se va de la ecuación al problema, y en la siguiente del problema a la ecuación. En las explicaciones de cada problema se incide más en esto.

Soluciones

1. Respuesta abierta. Como sugerencia para el primer caso:
En una huevera hay 5 huevos, si la completo con más huevos tengo una docena. ¿Cuántos huevos debo completar?

2. Respuesta abierta. Como sugerencia para el primer caso:
Tengo 8 bolsas iguales con chicles que hacen un total de 32 chicles. ¿Cuántos chicles hay en cada bolsa?

3. Respuesta abierta. Como sugerencia para el primer caso:
He puesto en dos canastas el mismo número de manzanas y no han cabido 6. Si en total había 20 manzanas. ¿Cuántas manzanas tiene cada canasta?

4. Respuesta abierta. Como sugerencia para el primer caso:
Con los puntos que tiene un jugador, si ganara 11 más, tendría el doble de cartas que su contrincante. ¿Cuántos puntos tiene?

5. Respuesta abierta. Como sugerencia para el primer caso:
El precio de dos manzanas más 2 € es el mismo que el de tres mandarinas menos 2 €. ¿Cuál es ese precio?

6. Respuesta abierta. Como sugerencia para el primer caso:
Si reparto todas mis cartas en cinco montones y quito dos, tendré las mismas cartas en cada montón que si a las que tengo le quito 18 cartas. ¿Cuántas cartas tengo?

Problemas sobre ecuaciones II

Del enunciado de un problema a su ecuación

En una clase hay el doble de niñas que de niños. Si en la clase hay un total de 24 alumnos/as. ¿Cuántos de ellos son niños y cuántos son niñas?

1. Determinamos cuál es el dato que desconocemos. En este caso, desconocemos el número de niños, ya que el de niñas se determina tras saber cuántos niños hay. Ese dato desconocido es x.
2. Establecemos las partes, según nos indica el problema.

   El de los niños x.

   El doble de niñas, es decir $2x$.

   La suma de ambos es 24.
3. Establecemos la ecuación: $2x + x = 24$.

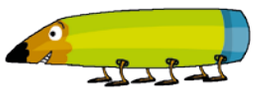
1 Establece la ecuación para estos problemas tipo 1 y 2.

a) Si sirvo 8 croquetas a mi hermano, tendrá en su plato 14, que son las mismas que tengo yo. ¿Cuántas croquetas tenía en su plato mi hermano?

b) En el colegio tenemos 15 clases. Si 8 de ellas ya han hecho Educación Física, ¿cuántas quedan por hacerla?

c) He comprado 6 paquetes de cromos. En total venían 30 cromos. ¿Cuántos cromos trae cada sobre?

d) Hemos repartido las botellas de refresco en 4 mesas, colocando en cada mesa 12 botellas. ¿Cuántas botellas teníamos en total?

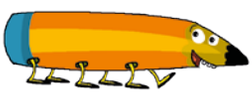


2 Establece la ecuación para estos problemas tipo 3 y 4.

a) En 2 macetas he puesto la misma cantidad de semillas. Si planto 6 semillas más, habré plantado las 14 semillas que tengo. ¿Cuántas semillas he puesto en cada maceta?

b) He llenado 5 botellas con agua. Ya hemos gastado 3 L y nos quedan otros 7 L en las botellas. ¿Cuántos litros de agua había en cada botella?

c) Si en una bolsa de naranjas pongo 16 naranjas más, habrá tantas como en 3 bolsas de naranjas. ¿Cuántas naranjas hay en cada bolsa?



3 Establece la ecuación para estos problemas tipo 5 y 6.

a) Si en una carpintería guardan los clavos en 3 cajas y gastan 2 clavos, hay los mismos que si los guardaran en 2 cajas y añadieran 7 clavos más. ¿Cuántas clavos hay en cada caja?

b) La mitad de los cromos que he pegado en un álbum, más 2 cromos, son los mismos que el triple de los que he pegado, menos 8 repetidos. ¿Cuántos cromos he pegado en el álbum?

Anotaciones

Pág. 195 Sugerencias metodológicas

Ahora nos ocupamos del proceso inverso. Hay que ir desde el enunciado de un problema a su ecuación. Veámoslo problema a problema.

Problema 1. Está formado por cuatro enunciados sencillos. El más complejo puede ser el de la letra c), en el que la incógnita es el número de cromos por sobre o paquete: $6x = 30$.

Problema 2. En el caso de la ecuación de la letra c) se debe invitar a los alumnos a que la resuelvan por deducción. Si 16 naranjas equivalen a dos bolsas…

Problema 3. En el caso actual, no se trata de resolver la ecuación, sino de enunciarla a partir del texto. Se presta muy bien, como en el caso de la letra c) del problema anterior, a que se averigüe la solución por deducción.

Soluciones

1. a) $x + 8 = 14$

b) $15 - 8 = x$. También $8 + x = 15$

c) $6x = 30$

d) $x/4 = 12$

2. a) $2x + 6 = 14$

b) $5x - 3 = 7$

c) $x + 16 = 3x$

3. a) $3x - 2 = 2x + 7$

b) $x/2 + 2 = 3x - 8$

Anotaciones

El código binario. La numeración en base 2

Comprender el código binario nos ayuda a entender cómo funciona nuestro sistema de numeración. Nuestro sistema se denomina base 10, porque todos los números se forman a partir de 10 cifras: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.

Pero no es la única forma de contar y de calcular. Otra forma es la que utilizamos con las máquinas, y que código binario o en base 2, en el cual solo existe dos cifras: el 0 y el 1.

Cuando se trabaja con bases distintas a la decimal, se representa el número con un subíndice con un paréntesis y el número de la base. Por ejemplo: $11_{(2}$, $11_{(10}$.

$11_{(2}$ significa que dicho número está en base 2, en la que solo existen el 0 y el 1.

$11_{(10}$ significa que dicho número está en base 10, en la que existen del 0 al 9.

¿Son el mismo número el $11_{(2}$ y el $11_{(10}$? Ahora lo vamos a comprobar.

La formación de los números

Con las cifras de cada sistema de numeración podemos formar el resto de los números. Para ello, empezamos con el 1, vamos añadiendo, uno tras otro, desde el 0 al 9, formando el 10, el 11… el 19, con lo que agotamos todas las combinaciones.

Hacemos lo mismo, pero ahora con el 2, desde el 0 hasta el 9, formando los números del 20 al 29.

1 ¿Qué números combinamos para formar el siguiente al 99? ¿Y para el 999?

En el código binario hacemos lo mismo, pero solo tenemos para combinar las dos cifras y sus nuevas combinaciones con el 0 y el 1.

La primera combinación sería el 0 con el 0, formando el 00, pero ese es el 0 y ya lo tenemos. Las siguientes serían:

Código decimal	0	1	2	3	4	5	6	7	→
Código binario	0	1	10	11	100	101	110	111	→
Combinación			1 y 0	1 y 1	10 y 0	10 y 1	11 y 0	11 y 1	→

→ Código decimal	8	9	10	11	12	13	…
→ Código binario	1000	1001	1010	1011	1100	1101	…
→ Combinación	100 y 0	100 y 1	101 y 0	101 y 1	110 y 0	110 y 1	…

2 Siguiendo el procedimiento, escribe en base 2 los números 14, 15, 16 y 17.

3 ¿Recuerdas la pregunta sobre si son el mismo número el $11_{(2}$ y el $11_{(10}$? Observa la tabla anterior y responde.

196

Pág. 196 Sugerencias metodológicas

En esta página se hace una pequeña explicación de cómo se almacena la información en los dispositivos electrónicos y su relación con el sistema de numeración binario, para presentar la unidad mínima de información, el «bit», cuyo primer múltiplo es el byte (que no debemos confundir con bit) en combinaciones de grupos de 8 bits. Lo anterior nos permite representar todos los caracteres del teclado (incluido el espacio que dejamos vacío y que ocupa un espacio digital).

Partiendo de este conocimiento y de la representación en el sistema binario, que ya estudiaron a través del método ABN en Primaria, solo nos queda indicar la necesidad de un código que relacione las combinaciones de cada grupo de bits con los caracteres y con su representación en base 10. Dicho código es el ASCII, acrónimo inglés de American Standard Code for Information Interchange (Código Estándar Americano para el Intercambio de Información).

Hay que advertir al alumnado de que, para realizar las conversiones, aunque en el código binario no se representan los ceros a la izquierda de la unidad, al tratarse de bytes de 8 bits, los que falten hasta 8 sí se completan con ceros a la izquierda.

Soluciones

1. El siguiente número, 100, se formará con la combinación de la primera pareja 10 y las cifra 0. Y para el 1 000, con la combinación de la primera centena con el 0

2. $14(10 = 1\,110_{(2}$ $\quad 15(10 = 1\,111_{(2}$
$16(10 = 10\,000_{(2}$ $\quad 17(10 = 10\,001_{(2}$

3. No, no son el mismo número. 11 en base 2 es el número 3 y 11 en base 10 es el número 11.

Código binario. Órdenes de magnitud

En el sistema decimal, cada orden de magnitud es 10 veces mayor a la anterior (1 D son 10 U; 1 C son 10 D…). De igual forma, en el código binario cada orden de magnitud es 2 veces el anterior. En esta tabla indicamos los órdenes de magnitud de mayor a menor y su valor.

ORDEN DE MAGNITUD	8.º	7.º	6.º	5.º	4.º	3.º	2.º	1.º
VALOR	128	64	32	16	8	4	2	1

Para pasar de binario a decimal basta con saber el valor de cada orden de magnitud y sumar sus valores. Por ejemplo: en $1001001_{(2}$.

ORDEN DE MAGNITUD	8.º	7.º	6.º	5.º	4.º	3.º	2.º	1.º
VALOR	128	64	32	16	8	4	2	1
EJEMPLO: 1001001		1	0	0	1	0	0	1

Sumamos los valores en los que esté el 1 → 64, 8 y 1 = 73, por tanto $1001001_{(2} = 73_{(10}$

Para el proceso inverso, buscamos los valores que sumen el número buscado, empezando por el más cercano (y sin repetir ninguno), y a esos valores le asignamos el valor 1 y el resto el valor 0. Por ejemplo, el 36.

ORDEN DE MAGNITUD	8.º	7.º	6.º	5.º	4.º	3.º	2.º	1.º
VALOR	128	64	32	16	8	4	2	1
EJEMPLO: 36			1	0	0	0	1	1

En la tabla, el más cercano al 35 es el 32, faltan 3, que lo formamos con el 2 y el 1. Si observas la tabla anterior, pondremos un 1 en esos órdenes de magnitud y el resto lo completamos con 0, quedando $100011_{(2}$.

1 Usando el procedimiento indicado, pasa de base 10 a base 2 estos números.

a) 6 b) 15 c) 68 d) 50

2 Usando el procedimiento indicado pasa de base 2 a base 10 estos números.

a) $111_{(2}$ b) $1010_{(2}$ c) $1001_{(2}$ d) $1111_{(2}$

Anotaciones

Pág. 197 Soluciones

1. a) $110_{(2}$ b) $1\,111_{(2}$ c) $1\,000\,100_{(2}$ d) $110\,010_{(2}$

2. a) 7 b) 10 c) 9 d) 15

Anotaciones

RESUELVO PROBLEMAS

Problemas con cambios de divisas

Observo

Si viajas a un país cuya moneda no sea el euro, tendrás que cambiar tu dinero a la moneda (divisa) de ese país. Igualmente te pasará, sin moverte de tu casa, al comprar por Internet en páginas web de otros países con moneda diferente al euro. Antes de cambiar divisas, debes saber que:

- Cada divisa tiene su propio valor y equivalencia con las demás.
- El valor de las divisas varía de acuerdo con la oferta y la demanda.
- Una misma divisa tiene un precio de venta y otro de compra.

COTIZACIÓN DE BILLETES Y DIVISAS RESPECTO AL EURO EN DICIEMBRE DE 2022

COMPRA DE DIVISAS		VENTA DE DIVISAS	
Dólar USA	0,94 €	Dólar USA	0,92 €
Libra esterlina	1,14 €	Libra esterlina	1,12 €
Yen japonés	0,011 €	Yen japonés	0,01 €

Resuelvo problemas

1. Si cambias (compras) 10 € por libras esterlinas y, a continuación, cambias (vendes) esas libras por euros, ¿qué ocurrirá en el proceso de cambio?
2. Jorge compra una cámara de fotos en una página web japonesa. Si el precio indica 24 000 yenes, ¿cuántos euros le costará?
3. Carlos ha puesto su viejo móvil a la venta en un portal de Internet y ha recibido una oferta de 50 dólares. ¿Cuántos euros le están ofreciendo?
4. Tras su regreso de Londres, Silvia quiere cambiar sus 135 libras por euros. ¿Las vende o las compra? ¿Cuántos euros le darán?

Invento, creo y razono

5. Inventa un problema de cambio de divisas a partir de los siguientes datos. Luego resuélvelo.

5 dólares USA | 3 libras esterlinas | 150 yenes

198

Pág. 198 Sugerencias metodológicas

No se suelen plantear dificultades de cálculo en estas tareas, siendo lo único que merece una especial atención entender que el dinero se pueda comprar o vender y que en esta compra y venta se produzca una ganancia y/o una pérdida en la transacción, no siendo dichos valores permanentes, sino que cambian continuamente como el precio de los productos frescos en el mercado.

Para aclarar estas cuestiones, se pueden poner ejemplos paralelos en los que se compre y venda dinero o cualquier otro objeto, como, por ejemplo, un juego de ordenador.

Soluciones

1. En el proceso de cambio se producirá una ligera pérdida.

2. Le costará 264 €.

3. Le están ofreciendo 47 €.

4. Los vende. Le darán 151,2 €.

5. Respuesta abierta.

Problemas de móviles I

Sigo los pasos y resuelvo el problema

El récord del mundo de 100 metros lisos está en 9 segundos. ¿Cuál es la velocidad media del atleta que tiene el récord? Exprésala en km/h.

1. Se establece la proporción.

   Si en 9 segundos recorre 100, en 3 600 recorrerá x. Es decir $\frac{9}{(3600)} = \frac{100}{x}$

2. Se soluciona como aprendimos en la Unidad 7.

3. Se pasa el resultado a km/h.

Resuelvo problemas

1. Adrián corre a una velocidad de 5 m/s. Si mantiene constante esta velocidad, ¿cuántos metros recorre en 15 minutos? ¿Cuál es su velocidad expresada en km/h?

2. José Manuel recorre a nado 100 metros en 58 segundos. Si mantiene constante esta velocidad, ¿cuánto recorrerá en 3 minutos?

3. José Carlos corre 360 metros hasta su casa en 2 minutos, y un gatito le persigue a una velocidad de 10 metros cada 2 segundos. ¿Cuál es más rápido?

Sigo los pasos y resuelvo el problema

Un coche viaja de Cádiz a Granada con una velocidad constante de 90 km/h. A las 8:00 pasa por Málaga, que está a 270 km de Cádiz. ¿A qué hora partió de Cádiz?

1. Calcula el tiempo que tarde en recorrer 270 km.

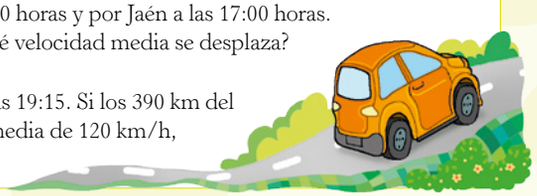
   270 : … = … horas

2. Retrocede desde las 8:00 el tiempo que ha tardado en recorrer los 270 km.

Resuelvo problemas

4. Un automóvil pasó por Murcia a las 14:00 horas y por Jaén a las 17:00 horas. Si entre Murcia y Jaén hay 330 km, ¿a qué velocidad media se desplaza?

5. Evelyn e Iria han llegado a Pamplona a las 19:15. Si los 390 km del trayecto los han hecho a una velocidad media de 120 km/h, ¿a qué hora salieron?



Anotaciones

El docente los pondrá ante retos concretos. Todos sabemos que el tren AVE alcanza los 300 km/h. Cuando va a esa velocidad, ¿cuántos metros recorre en un segundo? No llega a los 84 m. A partir de este dato se puede construir una escala sencilla: ¿Cuántos m/s recorre un tren convencional a 150 km/h? ¿Y un avión que viaja a 900 km/h? También se pueden hacer estimaciones, utilizando velocidades que no sean múltiplos o divisores de 300: ¿Cuántos m/s recorrerá un avión a 500 km/h?

El segundo tipo de problemas conecta los horarios con los móviles, utilizando a la vez los tres tipos de datos temporales: las horas límite, o sea, las que expresan el comienzo y el final de la actividad; las horas «tiempo», referidas al que emplean los móviles en recorrer una determinada distancia; y, finalmente, la hora como unidad, índice o ratio, puesto que la velocidad media aparece siempre referida a lo que se recorre en una hora.

Pág. 199 Sugerencias metodológicas

El primer tipo de problemas de móviles se ocupa de los cambios y equivalencias de unidades de referencia en los espacios recorridos y en los tiempos empleados. El movimiento de un cuerpo engloba la distancia recorrida y el tiempo invertido. Pero ambas magnitudes se pueden medir en diferentes unidades. Suele ser normal utilizar los kilómetros recorridos en una hora, pero ahora pretendemos que los alumnos y las alumnas aprendan a expresar un recorrido determinado en un período de tiempo concreto en diferentes unidades. Con ello, no solo practicarán habilidades matemáticas, sino que aumentará su comprensión de los fenómenos.

Soluciones

Encabezado: 3 600 × 100 : 9 = 40 000 m/h = 40 km/h.

1. En 15 minutos recorre 4 500 m. Su velocidad es de 18 km/h.

2. En tres minutos recorrerá 310,34 m.

3. José Carlos corre a 3m/s. El gato va más rápido, a 5 m/s.

Encabezado: 270 : 90 = 3 horas. 8:00 − 3 horas = 5:00.

4. El coche se desplaza a una velocidad media de 110 km/h.

5. Salieron a las 16:00.

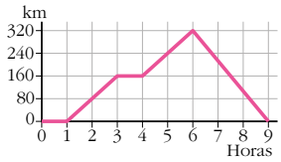
Anotaciones

RESUELVO PROBLEMAS

Problemas de móviles II: móviles y gráficos

Observo

El siguiente gráfico relaciona el espacio recorrido por un vehículo y el tiempo que ha empleado en ello.



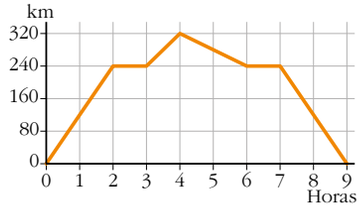
- En la primera hora el vehículo ha estado parado (no ha recorrido kilómetros).
- En las dos horas siguientes se ha movido a la misma velocidad ya que en cada hora ha recorrido el mismo espacio.
- A continuación, ha estado parado una hora.
- Las dos siguientes horas ha seguido a la misma velocidad constante que en el intervalo de 1 a 3.
- A partir de la 6.ª hora, como el espacio decrece, significa que da la vuelta y regresa al punto de partida, pero ahora a mayor velocidad, ya que recorre el mismo espacio en menos tiempo.

Resuelvo problemas

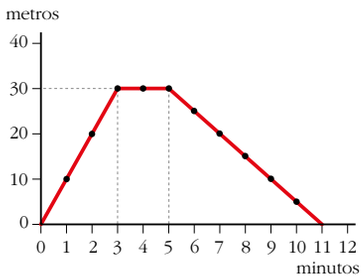
1 Describe los movimientos que realizan los siguientes vehículos:

a)

b)



2 Observa el siguiente gráfico de la distancia que ha recorrido un coche teledirigido. Contesta:



a) ¿Cuánto tiempo ha estado circulando y qué distancia ha recorrido?

b) ¿Qué distancia había recorrido a los 3 minutos de empezar?

c) ¿Cuánto recorrió desde el minuto 3 al 5?

d) ¿En qué tramo de tiempo fue más rápido? ¿Y más lento?

200

Pág. 200 Sugerencias metodológicas

El siguiente ejercicio entrena a los alumnos y las alumnas en la lectura de los gráficos que reflejan el movimiento. Se introduce con un ejemplo, en el que, paso a paso, se va explicando cada una de las variaciones que presenta el gráfico y su significado en términos de movimiento.

Soluciones

1. a) Circula durante las primeras cuatro horas a una velocidad constante de 60 km/h. De la cuarta a la quinta hora se detiene. Vuelve al punto de partida en el mismo número de horas (4) y a la misma velocidad media.

b) En las dos primeras horas, circula a una velocidad constante de 120 km/h y llega al kilómetro 240. Descansa una hora. Reinicia el viaje y circula durante una hora a 80 km/h. Hasta ahora, ha recorrido 320 km. De la hora cuarta a la sexta, retrocede ochenta kilómetros en dos horas, a una velocidad constante de 40 km/h. Vuelve a estar una hora parado en el kilómetro 240. Desde allí, regresa al punto de partida. Tarda 2 horas, a una velocidad media de 120 km/h.

2. a) Ha estado circulando 9 minutos y ha recorrido 60 m.

b) A los 3 minutos de empezar había recorrido 30 m.

c) Nada. Estuvo parado.

d) Fue más rápido los tres primeros minutos y más lento del minuto 5 al 11.

Observo

Los trayectos discontinuos son aquellos en los que la velocidad no permanece constante, sino que aumenta y disminuye durante el tiempo que dura el desplazamiento.

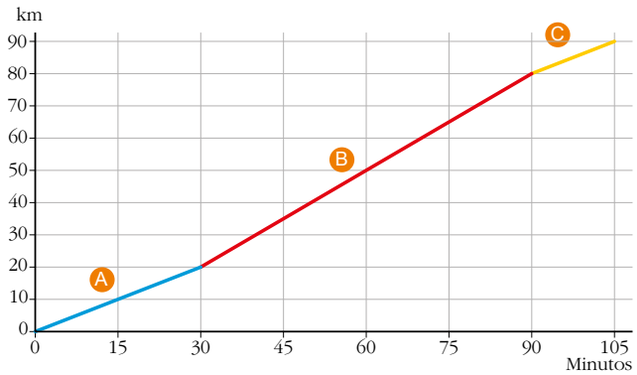
Vamos a calcular la distancia total que ha recorrido un coche que se mueve a distintas velocidades y lo que ha tardado en recorrerlo:

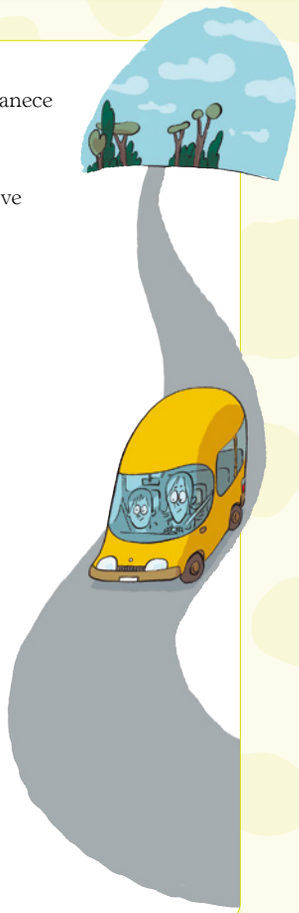
1. Durante 30 minutos va a 40 km/h. Recorre 20 km.
2. Durante la siguiente hora se mueve a 60 km/h. Recorre 60 km.
3. Finalmente circula a 40 km/h durante 15 minutos. Recorre 10 km.

En total, el coche ha recorrido 20 km + 60 km + 10 km = 90 km

Y ha tardado 30 min + 60 min + 15 min = 105 min

Si representamos ese movimiento en un gráfico (espacio − tiempo) quedaría así:





Resuelvo problemas

3. Un ciclista circula a 36 km/h en llano durante 20 minutos. Cuando llega a una pendiente, baja la velocidad a 26 km/h durante 10 minutos. Llega a la cumbre e inicia un descenso a 78 km/h durante media hora. ¿Qué distancia ha recorrido? ¿Cuánto tiempo ha tardado en recorrer esa distancia?

4. Dibuja en tu cuaderno un gráfico que relacione los kilómetros recorridos por el ciclista del ejercicio 3 y el tiempo durante el que ha estado pedaleando.

Anotaciones

Pág. 201 Sugerencias metodológicas

El siguiente ejercicio sobre móviles se centra, sobre todo, en la realización de gráficas que reflejen los movimientos, incluidos los que mantienen distinto ritmo a lo largo del trayecto que se recorre. Como en la página anterior, se parte de un ejemplo que se representa muy minuciosamente, con el fin de facilitar la comprensión del paso del enunciado verbal a su representación gráfica.

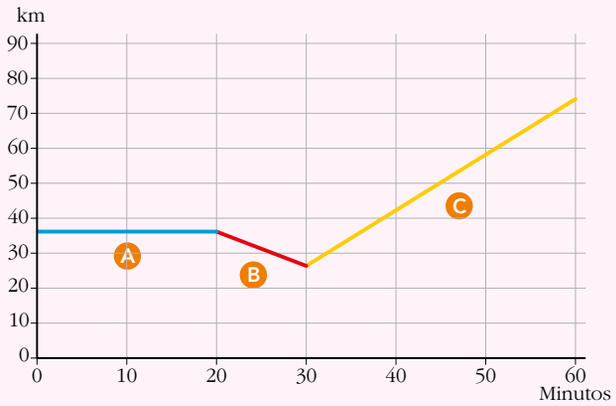
Soluciones

3. Ha recorrido una distancia de 55 km y 333 m.

Ha tardado una hora.

La velocidad media ha sido de 55,33 km/h.

4.



Anotaciones

TAREA COMPETENCIAL

Viaje de fin de etapa II

Los alumnos y alumnas de 6.º están ansiosos por coger ya el vuelo con destino a Londres para disfrutar de su merecidísimo viaje de fin de curso.

Unos días antes de la partida, los profesores les han facilitado una serie de recomendaciones para que todo en el viaje salga sin complicaciones.

1 Lo primero que les han recomendado es que lleven un máximo de 200 libras esterlinas. Teniendo en cuenta el cambio que hemos visto (1 libra = 1,14 €), indica cuántos euros les costará comprar dicha cantidad de libras.

a) 114 € b) 22,80 € c) 11,40 € d) 228 €

2 Con respecto al equipaje, tan solo pueden llevar una maleta con un peso máximo de 25 kg. Lucía no tiene báscula en casa. Su compañero Iker (fan de las mates) le lanza un acertijo para determinar el peso de su maleta. Resuélvelo utilizando el álgebra.

2 maletas como la tuya y 15 kg pesan lo mismo que 3 maletas como la tuya menos 7 kg. ¿Cuánto pesa tu maleta?

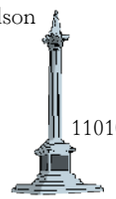
3 Todos deben estar en el aeropuerto a las 10:00. Su localidad se encuentra a 150 km del aeropuerto. Si deciden ir con un autobús hasta la terminal a una velocidad media de 100 km/hora, ¿a qué hora deberán salir de casa para llegar a la hora indicada?

a) 8:30 b) 9:00 c) 9:30 d) 7:30

4 Finalmente, para amenizar el vuelo, los maestros les han preparado unos pasatiempos que contienen información sobre algunos monumentos emblemáticos de Londres. Este es el que ha aportado el maestro de Matemáticas. Anímate y resuélvelo.

Los siguientes monumentos tienen su altura expresada en código binario. Indica en base 10 cuántos metros mide cada uno.

Estatua de Nelson

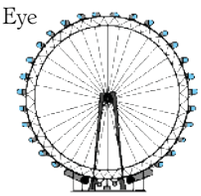


110100 m

Big Ben

1100000 m

London Eye



10000111 m

Pág. 202 Sugerencias metodológicas

Valen aquí las mismas orientaciones que se han señalado para las Tareas competenciales anteriores.

Soluciones

1. Opción d).

2. 22 kg

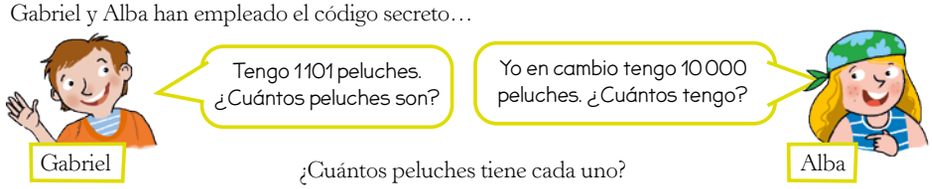
3. Opción a).

4. Estatua de Nelson: 52 m; Big Ben: 96 m; London Eye: 135 m.

REPASO

1 Escribe en código binario estos números: 12, 14, 45 y 90.

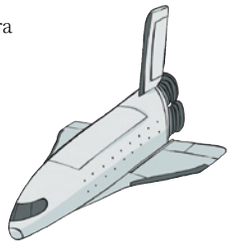
2 Gabriel y Alba han empleado el código secreto…

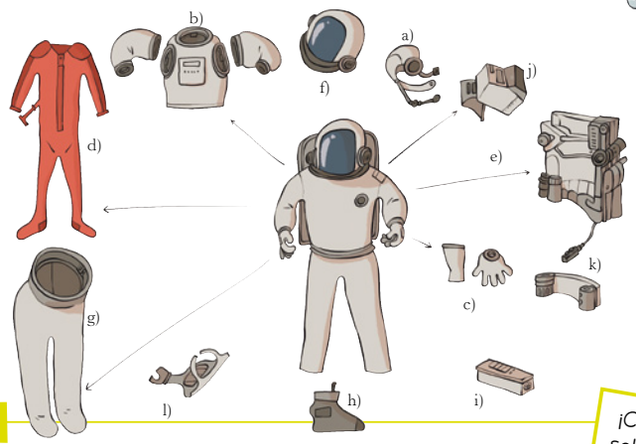


¿Cuántos peluches tiene cada uno?

3 Resuelve en tu cuaderno las siguientes ecuaciones, y con el valor de x encuentra los nombres de las partes de este hombre espacial.

a) $2x - 3 = 6 + x$
b) $15 - x = 5x + 15$
c) $2x + 5 = 19$
d) $7x + 10 = -7x + 94$
e) $x + 7 = 12x - 2 - 8x$
f) $-12x + 10 = 10x - 166$
g) $\frac{x}{4} + 25 = 4x + 10$
h) $5x - 15 = x + 29$
i) $6x + 6 - 4x = 5x - 9$
j) $\frac{x}{3} + 8 = 2x - 12$
k) $11x - 10 = 144$
l) $2x - 15 = 8x - 75$





Claves

¡Cuidado! Quizá te sobre alguna clave.

$x = 0$	Acoplamiento de brazos
$x = 1$	Dispositivo GPS
$x = 3$	Soporte vital primario
$x = 4$	Ensamblaje del torso
$x = 5$	Batería
$x = 6$	Traje refrigerado y ventilado
$x = 7$	Manoplas
$x = 8$	Escafandra
$x = 9$	Unidad de telecomunicación
$x = 10$	Dispositivo de recogida de orina
$x = 11$	Bolsa de bebida
$x = 12$	Pantalla y módulo de control
$x = 14$	Soporte secundario de oxígeno

Anotaciones

Pág. 203 Sugerencias metodológicas

1. a) 1 010 b) 1 000 c) 1 111 d) 11 110

2. Gabriel tiene 13 peluches y Alba 16 peluches.

3. a) $x = 9$ Unidad de telecomunicación.
b) $x = 0$ Acoplamiento de brazos.
c) $x = 7$ Manoplas.
d) $x = 6$ Traje refrigerado y ventilado.
e) $x = 3$ Soporte vital primario.
f) $x = 8$ Escafandra.
g) $x = 4$ Embalaje del torso.
h) $x = 11$ Bolsa de bebida.
i) $x = 5$ Batería.
j) $x = 12$ Pantalla y módulo de control.
k) $x = 14$ Soporte secundario de oxígeno.
l) $x = 10$ Dispositivo de recogida de orina.
$x = 1$ Dispositivo GPS, que no corresponde a ninguna ecuación.